

TEORIA DE GRUPOS APLICADO AO CUBO DE RUBIK

Antonio Sidiney da Costa Oliveira

23 de outubro de 2015

Resumo

Esse trabalho terá como objetivo apresentar a teoria de grupos voltada para o cubo, mas especificamente o Cubo de Rubik, iremos ter uma introdução dando ênfase ao assunto de teoria de grupos, em seguida apresentamos o teorema de Lagrange através da Classe lateral, e também será apresentado o cubo em si, e uma das inúmeras soluções que o cubo apresenta. Será bastante interessante enfatizar que além de ser um assunto complexo grupos adicionado ao cubo torna-se mais uma brincadeira do que complicado.

Palavras-Chave: Cubo de Rubik, Grupos, Solução.

1 Introdução

A teoria de Grupos surge no final do século XVIII e início do século XIX e é conhecida como a teoria abstrata. De modo mais específico, a teoria de grupos é a linguagem matemática adequada para a descrição das simetrias, e teve vários matemáticos influentes que tiveram grandes participações para o desenvolvimento desse conhecimento, tais como Gauss, Lagrange, Ruffini, Abel, Cauchy e Galois. Esses matemáticos realizaram estudos sobre Grupos específicos, porém os estudos desses incríveis matemáticos não é o nosso foco, entretanto o nosso objetivo é conhecer um pouco sobre esse tema, onde ele irá

nos orientar a desenvolver o estudo da teoria de Grupos aplicado ao cubo que esse sim é o principal objetivo desse trabalho.

O trabalho está dividido em 2 capítulos, executando cada uma das definições, teoremas e demonstrações decorrente do tema abordado. No capítulo 1 temos a teoria básica apresentando definições de Grupos, subgrupos, classe lateral com o teorema de Lagrange, que por sua vez nos mostra que a ordem do índice de um determinado subgrupo dividem a ordem do grupo. E adentrando em seguida a uma abordagem rápida sobre permutação. Logo após será apresentado no 2 capítulo uma das soluções do cubo, usando movimentos permutados e algumas macros para que possamos chegar a uma solução clara e interessante.

2 Teoria de Grupos

Neste capítulo vamos nos adentrar no estudo da álgebra voltada para o assunto de grupos, tendo como principal objetivo mostrar alguns conceitos de grupos, subgrupos e alguns dos subtemas relacionados ao mesmo, e também dar uma breve introdução a permutação. E no decorrer do trabalho vamos nos deparar com as aplicações da teoria de grupos no cubo de rubik.

3 Grupos

Definição 1: É uma estrutura algébrica formada por um conjunto não vazio G , munido de operação que podemos chamá-lo de $*$, para generalizar uma operação interna em G . Denotado por:

$$\begin{aligned}(G \times G) &\rightarrow G \\ (a, b) &\rightarrow (a * b)\end{aligned}\tag{1}$$

Dizemos que $(G, *)$ é um grupo se satisfazer as seguintes propriedades:

- Associatividade: $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$.
- Elemento neutro: existe um número $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a, \forall a \in G$.

- Inverso ou simétrico: podemos considerar, $\forall a \in G$, exista um elemento $a^{-1} \in G$ de tal modo que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Então se satisfizer todas essas propriedades acima mencionadas, aí temos um grupo.

O símbolo $*$ representa uma operação qualquer no conjunto.

Quando a operação no conjunto for de adição, denominamos que $(G, +)$ é um grupo aditivo. Quando a operação no conjunto for multiplicação, denominamos que $(G, *)$ é um grupo multiplicativo. Além disso, se qualquer elemento do grupo satisfizer a propriedade da comutatividade, dizemos que ele é um grupo abeliano ou comutativo.

4 Grupos Abelianos ou Comutativos

Definição 1.1: Dizemos que um grupo $(G, *)$ é abeliano ou comutativo se a lei $(x, y) \longrightarrow x * y$ é comutativa, isto é $x * y = y * x, \forall x, y \in G$.

5 Subgrupos

Definição 2: seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto não vazio H de G é um subgrupo de G (denotado $H < G$) quando, com a operação de G , o conjunto H é um grupo, isto é, quando as condições seguintes são satisfeitas:

- 0) $h_1 * h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H$.
- i) $h_1 * (h_2 * h_3) = (h_1 * h_2) * h_3, \forall h_1, h_2, h_3 \in H$.
- ii) $\exists e_H \in H$ tal que $e_H * h = h * e_H = h, \forall h \in H$.
- iii) Para cada $h \in H, \exists k \in H$ tal que $h * k = k * h = e_H$.

Observação

- 1) A condição i) é sempre satisfeita, pois a igualdade $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$ é válida para todos os elementos de G .
- 2) O elemento neutro e_H de H é necessariamente igual ao elemento e de G . De fato, tomando $a \in H \subseteq G$, temos $e_H * a = a$; multiplicando os dois lados por a^{-1} à direita, obtemos $e_H = e$.

- 3) Dado $h \in H$, o inverso de h em H é necessariamente igual inverso de h em G . De fato, se k é o inverso de h em H , então $h * k = k * h = e_H$, logo $h * k = k * h = e$ pois $e_H = e$, e portanto k é o invreso de h em G .

Proposição 1 *Seja H um subconjunto não vazio do Grupo G . Então H é um subgrupo de G se e soment se as duas condições seguintes são satisfeitas:*

- 1) $h_1 * h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H$.
- 2) $h^{-1} \in H, \forall h \in H$.

Demonstração: Suponhamos que H seja um subgrupo de G . A condição 1) é então claramente satisfeita. Agora, seja $h \in H$; sendo H um grupo, h possui um inverso em H ; mas, pela Observação acima, 3) tal inverso é necessariamente que seja igual ao inverso de h em G , isto é, é necessariamente igual a h^{-1} ; logo $h^{-1} \in H$, e a condição 2) é satisfeita. Reciprocamente, suponhamos que as duas condições 1) e 2) sejam satisfeitas. Então a condição 0) da definição é claramente satisfeita. Como já observamos a condição *i*) sempre é satisfeita. Para ver que a *ii*) é satisfeita, basta ver que $e \in H$; isto de fato acontece pois, tomando $h \in H$, temos $h^{-1} \in H$ pela condição 2) e logo $e = hh^{-1} \in H$ pela condição 1). Finalmente, que a condição *iii*) é satisfeita decorre da condição 2) ser satisfeita.

Na prática, para verificar que um subconjunto H é um subgrupo de um grupo G , basta verificar as propriedades 1) e 2) são satisfeita, se forem então temos um subgrupo.

6 Classes laterais e o teorema de Lagrange.

Seja G um grupo, H um subconjunto de G e a um elemento de G .

Usamos as seguintes notações:

Definição:(Classe lateral de H em G)

Seja H um subgrupo do grupo G . O conjunto aH diz-se a classe lateral esquerda de H em G contendo a .

O conjunto Ha diz-se a classe lateral a direita de H em G contendo a .

O elemento a diz-se um representante da classe lateral aH (ou Ha).

Exemplo:

Sejam $G = S_3$ e $H = \{(1), (123), (132)\}$. As classes laterais esquerdas de H em G são:

- $(1)H = H = (1\ 2\ 3)H = (1\ 3\ 2)H$;
- $(1\ 2)H = \{(1\ 2), (1\ 2)(1\ 2\ 3), (1\ 2)(1\ 3\ 2)\} = \{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\} = (1\ 3)H = (2\ 3)H$.

Lema 1: Todas as classes laterais aH tem o mesmo número de elementos que H .

Demonstração 1 Se $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$, então $aH = \{ah_1, ah_2, \dots, ah_n\}$ se $ah_i = ah_j$ então:

$$a^{-1}(ah_i) = a^{-1}(ah_j)$$

$$(a^{-1}a)h_i = (a^{-1}a)h_j$$

$$eh_i = eh_j$$

$$h_i = h_j$$

Logo se $h_i \neq h_j$, então $ah_i \neq ah_j$, portanto aH possui n elementos distintos:

Lema 2: Dados duas classes laterais aH e bH então $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \emptyset$.

Suponhamos que $aH \cap bH \neq \emptyset$, ou seja, existe

$$x = aH_1 = ah_2, \forall h_1, h_2 \in H$$

Logo:

$$a = bh_2h_1^{-1}, b = h_1h_2^{-1}.$$

Se $aH \ni bh' = ah_1h_2^{-1}h' = ah_4$ para $h_4 = h_1h_2^{-1}h' \in H$.

Logo:

$$bH \subset aH$$

$$aH = bH$$

Lema 3: Todo elemento pertence a alguma classe lateral.

Para $a \in G$, $a \in aH$ pois $a = ae, e \in H$

7 Teorema de Lagrange

Se G é um grupo finito e H é um subgrupo de G , então $\text{ord}(H)$ divide $\text{ord}(G)$. Além disso, o número de classes laterais esquerdas (ou direitas) distintas é $\text{ord}(G)/\text{ord}(H)$.

Demonstração: Sejam $a_1H, a_2H, \dots, a_rH$ as classes laterais esquerdas distintas de H em G . Como cada elemento de G pertence a alguma classe lateral esquerda de H (por 1 do Lema anterior), tem-se:

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_rH.$$

Como esta união é disjunta (o Lema anterior), tem-se:

$$|G| = |a_1H| + |a_2H| + \dots + |a_rH|$$

Então temos que; $|a_iH| = |H|$, para qualquer i , logo $\text{ord}(G) = r\text{ord}(H)$.

O Teorema de Lagrange tem diversas consequências, algumas das quais, imediatas.

Atendendo a que a ordem de um elemento de um grupo finito tem a ordem do subgrupo por ele gerado, tem-se:

Corolário ($\text{ord}(a)$ divide $\text{ord}(G)$)

A ordem de um elemento de um grupo finito divide a ordem do grupo.

8 Cubo Planificado.

8.1 A permutação aplicada ao Cubo Mágico

			28	29	30			
			31	32	33			
			34	35	36			
46	47	48	1	2	3	37	38	39
49	50	51	4	5	6	40	41	42
52	53	54	7	8	9	43	44	45
			10	11	12			
			13	14	15			
			16	17	18			
			19	20	21			
			22	23	24			
			25	26	27			

Figura 1: Cubo original

Um exemplo notório que podemos ver abaixo, movimentos no qual permutam algumas das peças dos cubinhos, tendo em vista que, algumas das faces não sejam alteradas; vejamos o movimento Fr na figura 2.2:

			28	29	30			
			31	32	33			
			54	51	48			
46	47	10	7	4	1	34	38	39
49	50	11	8	5	2	35	41	42
52	53	12	9	6	3	36	44	45
			43	40	37			
			13	14	15			
			16	17	18			
			19	20	21			
			22	23	24			
			25	26	27			

Figura 2: Movimento Fr

Podemos observar a visualização da permutação em ciclos do movimento feito, obtemos estes resultados abaixo:

$$Fr = (1\ 7\ 9\ 3)(2\ 4\ 8\ 6)(10\ 43\ 36\ 48)(11\ 40\ 35\ 51)(12\ 37\ 34\ 54)$$

Portanto pode-se observar que o cubo pode ser um instrumento fundamental no estudo da teoria de Grupos e em particular em permutações, donde podem ser encontradas todas as possíveis combinações de movimentos que o cubo apresenta para a sua solução, entretanto esse estudo nos trás a curiosidade de ir à busca da solução possível do cubo de Rubik.

9 Montando cubo de Rubik

O Cubo de rubik foi inventado por Erno Rubik em 1974, para ilustrar o conceito de simetria (precursor da teoria de Grupos). Para comhecer melhor o cubo e ter mais familiaridade, é mais viável indicar as faces pela primeira letra de seus respectivos nomes

em inglês: *Front*, *Back*, *Upper*, *Down*, *Left* e *Right*. Como na figura 2.5:

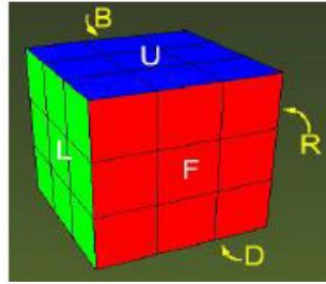


Figura 3: Apresentação do cubo

Se verificarmos, cada face pode ser girada de um quarto de volta ou de meia volta, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário.

Como já vimos que as suas faces já são nominadas, podemos indica-las da seguinte forma no sentido horário por F, B, U, D, L e R . Também é usual indicar por $F^{-1}, B^{-1}, U^{-1}, D^{-1}, L^{-1}$ e R^{-1} os respectivos movimentos inversos, ou seja, movimentos de quarto de volta no sentido anti-horário.

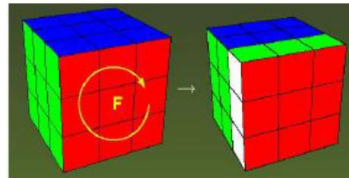


Figura 4: Movimento horário

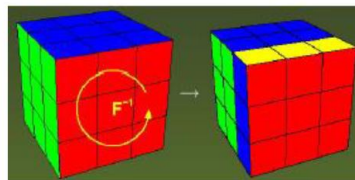


Figura 5: Movimento anti-horário

9.1 Não-comutatividade

Um fato óbvio, mas muito importante, é que $FL \neq LF$, como mostra a figura abaixo.

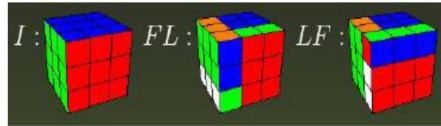


Figura 6: A não comutatividade

Chamamos esse fenômeno de não-comutatividade. O mesmo ocorre com quaisquer faces adjacentes. É justamente a não-comutatividade que torna o Cubo um quebra cabeças.

9.2 O que é "resolver" o Cubo?

Embaralhar o Cubo significa aplicar uma sequência aleatória de movimentos a um Cubo resolvido:

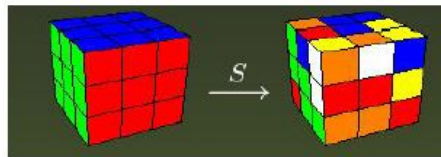


Figura 7: Cubo resolvido

Resolver o Cubo geralmente significa encontrar alguma sequência de movimentos tal que $ST = I$.

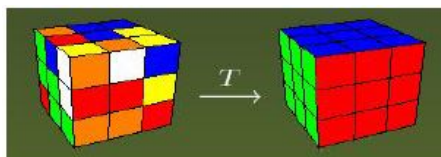


Figura 8: Cubo embaralhado

9.3 Uma estratégia de resolução

Nesta estratégia resolveremos o cubo por camadas. Começamos por revolver a primeira camada:

Isto é fácil, pois não é preciso se preocupar com as demais camadas. É melhor começar pelas arestas e depois pelos cantos.

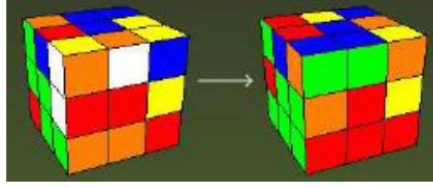


Figura 9: Primeira camada

9.4 Resolvendo a segunda camada

Esta etapa consiste em colocar os cubinhos de aresta da segunda camada na sua posição e orientação corretas.

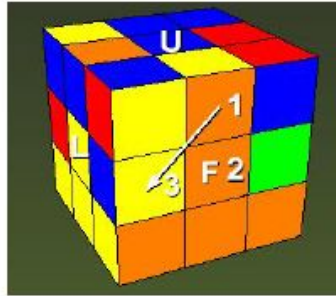


Figura 10: Segunda camada

Para fazer isso, temos que posicionar o cubinho na posição $UF(1)$ para depois movê-los para a posição $LF(3)$. Dependendo das cores das facetas (1) e (2), isso pode ser feito com alguns dos modos, isto é, pode haver dois casos:

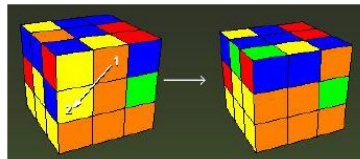


Figura 11: Movimento com as cores iguais

UF e LF com a mesma cor

A macro para isso é $U^{-1}FU^2RUR^{-1}U^2F^{-1}(10q)$. Logo podemos observar que, ao movermos o cubinho (1) para a direita, e depois fazemos FU^2R . O cubinho vai parar à esquerda, por causa de U^2 . Ele deve estar atrás para terminar no lugar certo, por isso fazemos U e, em seguida $R^{-1}U^2F^{-1}$ e pronto.

9.5 UF e LF com cores diferentes

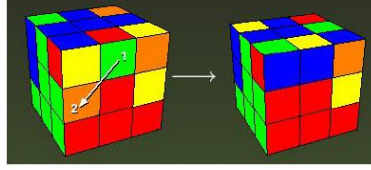


Figura 12: Movimento com as cores desiguais

A macro para isso é $FU^2RU^{-1}R^{-1}U^2F^{-1}(9q)$. Aqui vale a mesma observação sobre FU^2R . Só que agora, deixamos o cubinho (1) onde ele está e fazemos FU^2R . Ele vai parar no topo à direita. Como ele deve estar atrás, fazemos U^{-1} e, em seguida $R^{-1}U^2F^{-1}$ e pronto.

9.6 Resolvendo a terceira camada

Esta etapa é a mais difícil, pois o único movimento simples que não afeta o resto do Cubo é girar a face U . O objetivo pode ser alcançado em duas etapas:

- Primeiro colocamos os cubinhos de canto em suas posições e orientações corretas.
- Depois fazemos o mesmo com os cubinhos de aresta.

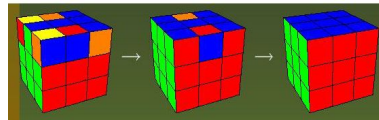


Figura 13: Solucionando a terceira camada

Se há cantos errados, deixamos o que estiver certo na posição UFR . Um fato que veremos adiante é que não é possível trocar dois cantos apenas, deixando o resto como está, mas podemos trocar três. Os demais cantos, ULF , ULB e URB , podem ser trocados ciclicamente como segue.

9.7 Movendo os cantos no sentido horário

$ULF(1) \rightarrow ULB(2) \rightarrow URB(3) \rightarrow ULF(1)$, no sentido horário, como ilustra a figura:

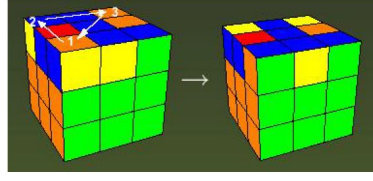


Figura 14: Movimentos de canto no sentido horário

A macro para isso é a seguinte:

$$L^{-1}URU^{-1}LUR^{-1}U^{-1}(8q).$$

9.8 Movendo os cantos no sentido anti-horário

$ULF(1) \rightarrow URB(2) \rightarrow ULB(3) \rightarrow ULF(1)$, no sentido anti-horário, como na figura:

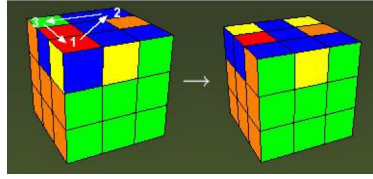


Figura 15: Movimentos de canto no sentido anti-horário

A macro para isso é a seguinte:

$$BU^{-1}F^{-1}UB^{-1}U^{-1}FU(8q).$$

9.9 Orientando os cantos

Agora os cantos estão na posição certa, mas podem estar orientados incorretamente. Nesse caso, é preciso girar os cantos errados. No entanto, é surpreendente que girar um canto no sentido horário requer que outro seja girado em seguida anti-horário e vice-versa. A razão disto será apresentada mais adiante.

Girando os cantos superiores frontais, UFL em sentido horário e UFR em sentido anti-horário:

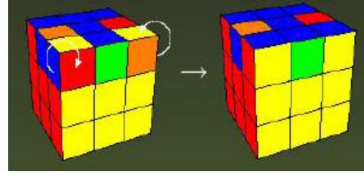


Figura 16: Orientação sentido horário

A macro para isso é a seguinte:

$$F^{-1}DFLDDL^{-1}ULD^{-1}L^{-1}F^{-1}D^{-1}FU^{-1}(14q).$$

Se $S = F^{-1}DFLDDL^{-1}$ então esta macro é $SUS^{-1}U^{-1}$

Girando os cantos superiores frontais, em sentido anti-horário e em sentido horário:

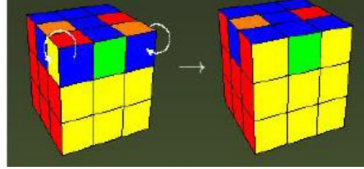


Figura 17: Orientação sentido anti-horário

A macro para isso é a seguinte:

$$R^{-1}DRFDF^{-1}U^{-1}FD^{-1}F^{-1}R^{-1}D^{-1}RU(14q).$$

Se $T = R^{-1}DRFDF^{-1}$ então esta macro é $TU^{-1}T^{-1}U$.

9.10 Posicionando as arestas

Agora os cubinhos de cantos estão corretos, mas ainda falta posicionar e orientar as arestas.

9.11 Movendo as arestas no sentido horário

$UF(1) \rightarrow UL(2) \rightarrow UB(3) \rightarrow UF(1)$ ciclicamente, em sentido horário:

A macro para isso é o seguinte:

$$L^2UF^{-1}BL^2FB^{-1}UL^2(12q).$$

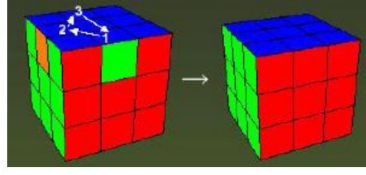


Figura 18: Orientação da aresta sentido horário

9.12 Movendo as arestas no sentido anti-horário

$UF(1) \rightarrow UB(2) \rightarrow UL(3) \rightarrow UF(1)$ ciclicamente, em sentido anti-horário:

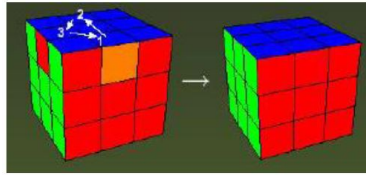


Figura 19: Orientação da aresta sentido anti-horário

A macro para isso é a seguinte:

$$L^2U^{-1}F^{-1}BL^2FB^{-1}U^{-1}L^2(12q).$$

Finalmente, todos os cubinhos de aresta estão em sua posição. Mas pode ocorrer de dois ou quatro deles estarem orientados incorretamente. Podemos corrigir isso girando um par de cubinhos de aresta ao mesmo tempo.

9.13 Girando as arestas $UF(1)$ e $UL(2)$ como na figura:

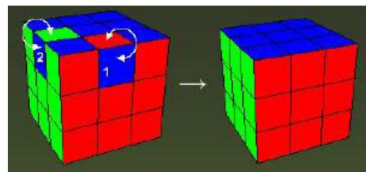


Figura 20: Reorientação da aresta

A macro para isso é a seguinte:

$$FUD^{-1}L^2U^2D^2RU^{-1}R^{-1}D^2U^2L^2DU^{-1}F^{-1}U(22q).$$

Note que se $X = FUD^{-1}L^2U^2D^2R$, então esta macro é simplesmente $XU^{-1}X^{-1}U$.

9.14 Girando as arestas $UF(1)$ e $UB(2)$:

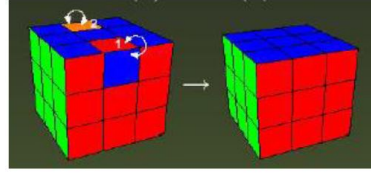


Figura 21: Reorientação da aresta segundo caso

A macro para isso é a seguinte:

$R^{-1}LFR^{-1}LDR^{-1}LBR^{-1}LU$ seguido de $UR^{-1}LFR^{-1}LDR^{-1}LBR^{-1}L(24q)$.

Há um atalho: $LF^{-1}UL^{-1}FB^{-1}UR^{-1}FU^{-1}RF^{-1}BU^{-1}(14q)$.

10 Considerações Finais

Nesse trabalho apresentamos conceitos básicos de Grupos, com uma breve introdução aos seus conceitos e definições, adentrando também ao cubo planificado donde apresentamos o estudo da permutação que através dos seus movimentos, podemos determinar e chegar a sua solução, sendo assim tomando referências a todos os seus movimentos possíveis apresentado pelas suas respectivas faces. Dando seguimento, vimos e aprendemos uma das várias soluções do cubo de Rubik.

Assim como outros assuntos da matemática em si que são direcionados a vários aspectos de amplos conhecimentos, este não é diferente, podemos ter como premissa o estudo do cubo através da teoria de grupos, mas também podemos ter como estudo, o cubo aplicado ao tema de permutações e dentre outros assuntos da algebra, dependendo do modo e da necessidade da metodologia que se discute e que se põe em questão.

O cubo nos traz uma grande curiosidade, ou seja, quem nunca pegou em um cubo e tentou montar mesmo que seja por movimentos aleatórios, eu adoto esse tema como uma brincadeira que nos enche de conhecimento principalmente pra nós pesquisadores e professores da área da matemática. Onde deixa ampla a extensão e ficando a critério de quem manusear e aplicar suas metodologia através da algrbra.

Referências

- [1] DOMINGUES, Hygino H; Iezzi, Gelson, *Álgebra moderna*. 4 Ed. Reform. - São Paulo: Atual, 2003.
- [2] DAVID, Joyner; *Adventures group in Group Theory Rubik's Cube, Merlin's Machine the Other Mathematical Toys*. second edition, (1 Dec 2008).
- [3] GARCIA, Arnaldo; Lequain, Yves, *Elementos de Álgebra*. 6 Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [4] GONÇALVES, Adilson, *Introdução à álgebra*. 5 Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [5] HERNSTEIN, I. N., *Tópicos de Álgebra*. tradução de Adalberto P. Bergamasco e L. H. Jacy Monteiro. Editora da Univ. e Polígono, 1970.
- [6] PEREIRA, Fernanda A. Pereira, José Henrique, *A Álgebra no Cubo Mágico. XVIII Semana da Matemática IBILCE/UNESP 24 a 27 de outubro de 2006*.
- [7] **Parte 1...10, Como montar o Cubo Mágico**. 2007. Disponível em: < [https :
//www.youtube.com/watch?v=3b-cH-o8-y0](https://www.youtube.com/watch?v=3b-cH-o8-y0) >. Acesso em: 21 Agosto. 2014.
- [8] **Grupos Finitos** Marcos Antonio da Silva. 2002. Disponível em: < [http :
//repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97162/Marco-Antonio-da-Silva.PDF?sequence](http://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97162/Marco-Antonio-da-Silva.PDF?sequence) >. Acesso em: 25 Agosto. 2014.