A COORDENAÇÃO ENTRE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: O CONHECIMENTO ENTRE A MATEMÁTICA E A INFORMÁTICA

Helington Franzotti Araújo de Souza[1]*, Alan Gonçalves Lacerda*[2]

RESUMO
Este artigo integra as ações do primeiro autor sob a orientação do segundo ao Projeto de *Pesquisas em Educação Matemática na Formação de Professores.* Na ocasião foram desenvolvidas oficinas junto aos alunos do ensino médio com o intuito de explanar sobre o *software* de matemática dinâmica GeoGebra. Tendo como referencial teórico relacionados ao registro de representação semiótica Duval, (2009); Damm, (2010); Colombo, (2008). Quanto a informática no ensino e aprendizagem da matemática temos Borba e Penteado (2010); Borba (1993) e dentre outros. Os resultados indicaram que a utilização de tecnologias informáticas nas aulas de matemática pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos, no sentido que as mesmas possibilitam a articulação entre as múltiplas representações semióticas dos objetos matemáticos e, além disso, possuem um caráter motivacional deixando a aula mais dinâmica e interativa.

Palavras-chave: GeoGebra. Representações Semióticas. PIBID.

[1] Licenciado Pleno em Matemática pela Universidade Federal do Pará – Campus Breves. Bolsista/PIBID. E-mail: helingtonfranzotti@gmail.com
[2] Doutorando em Educação em Ciências e Matemáticas pela UFMT/UFPA/UEA - REAMEC. Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela UFPA, professor da UFPA – Campus Breves. Coordenador de Área do Projeto PIBID/UFPA/Breves. E-mail: alanlacerda@ufpa.br

1 Introdução

Muitas pesquisas na área da Educação Matemática têm sido realizadas em relação à natureza de se entender os registros de representação semiótica na matemática (DUVAL, 2009; DAMM, 2010; COLOMBO, 2008). Geralmente não se distinguem as atividades propostas em sala de aula quanto ao registros de representação, o que tem ocasionado dificuldades na representação do objeto matemático. Segundo Colombo (2008, p. 113), as atividades de conversão entre os diferentes registros favorecem a compreensão à medida que cada representação explicita aspectos diferenciados dos objetos, o que conduz aos mecanismos subjacentes à aquisição dos conceitos. Para Duval (2009) a conversão é fundamental e necessária à aquisição conceitual dos objetos matemáticos. Daí a sua importância para o ensino e aprendizagem da matemática.

Sendo assim, objetivamos compreender os processos cognitivos envolvidos na construção dos conhecimentos matemáticos e assim melhorar o processo de ensino e aprendizagem de matemática, especificamente na atividade de uso com a informática pela recorrência a exploração do GeoGebra. Outro tema bastante atual na Educação Matemática que também é o foco de nosso estudo neste artigo diz respeito ao uso de ferramentas tecnológicas para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos ancorados, sobretudo nos estudos de Borba e Penteado (2010); Borba (1993); Purificacão (2010).

Não podemos negar a importância dos computadores nas sociedades contemporâneas. O desenvolvimento e a evolução do computador, aliado aos grandes avanços tecnológicos da microeletrônica têm propiciado e facilitado cada vez mais o acesso das pessoas de um modo geral a este novo tipo de mídia. Vivemos em uma época na qual as pessoas encontram-se imersas em uma nova realidade onde os aparatos tecnológicos estão presentes em grande parte da sua vida, como por exemplo, no ambiente de trabalho, lazer e em casa.

Valadares (2005) observa que a tecnologia tem expandido vertiginosamente as suas fronteiras e o seu impacto na sociedade. Nesta mesma perspectiva, Silva (1997, p.1) ressalta que o desenvolvimento das máquinas informáticas tem acarretado grandes transformações na indústria, no estilo de vida das pessoas, nas relações de trabalho e inclusive nos estilos de conhecimento. Podemos conjecturar que se este fato ocorre em diversos contextos da vida humana e nas mais variadas situações, é natural que no ambiente escolar não seja diferente, isto é, não podemos deixar de notar a inserção das “novas” mídias digitais na escola. Seja uma simples calculadora de bolso, celular, tablet ou um microcomputador, sua presença não pode ser simplesmente ignorada no ambiente da sala de aula.

Pesquisas em educação têm mostrado a relevância da informática na construção do conhecimento e, sobretudo, do potencial que a informática proporciona para aprendizagem da matemática. Purificação (2010, p. 155) menciona os trabalhos de Weigand e Weth (2002) que “mostram o potencial do uso do computador, e da internet, em atividades algébricas e geométricas”.

Tendo como problemática: como o uso da linguagem na articulação dos registros de representação semiótica na aprendizagem de conceitos matemáticos pode favorecer a compreensão dos alunos por meio das Tecnologias da Informação e Comunicação. Partindo deste ponto, abordamos a utilização do *software* GeoGebra como ferramenta que pode auxiliar na construção de conhecimentos matemáticos, favorecendo a articulação entre os registros de representação semiótica.

2. Encaminhamento metodológico

Lócus da pesquisa

As atividades da pesquisa foram realizadas na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio do município de Breves-Pa. Este projeto integra as ações do projeto de pesquisa intitulado: *Pesquisas em Educação*

Matemática na Formação de Professores: Metodologias e Perspectivas para o Marajó/Breves.

Sujeitos participantes

A pesquisa foi realizada com alunos de uma turma do 2º ano do ensino médio. O fato dos alunos escolhidos para a pesquisa estarem cursando o ensino médio, levou-nos a inferir que os mesmos já deveriam possuir conhecimentos mínimos sobre representações gráficas no plano cartesiano e também sobre métodos de resolução de sistemas de equações lineares com duas incógnitas.

Procedimentos para análises

Para coletar os dados para as análises realizamos uma pesquisa de campo, na qual analisamos a inserção do *software* GeoGebra em atividades de matemática com alunos do 2º ano do ensino médio. Para as análises dos dados, utilizamos uma abordagem qualitativa, pois "engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões" (BICUDO, 2006, p. 106). Nesse sentido, cabe ao pesquisador observar e investigar aspectos presentes nas respostas dadas pelos sujeitos no fazer matemática, durante o desenrolar das atividades, levando em consideração suas percepções, atitudes e opiniões. Segundo Bicudo (2006, p. 112), "Estes procedimentos exigem rigor. Solicitam abordagem qualitativa porque buscam manifestações na percepção, porque trabalham com a linguagem, com o discurso".

A pesquisa teve início com uma apresentação do GeoGebra para os alunos, pois a grande maioria não conhecia o programa. Aliás, alguns alunos nem mesmo sabiam que se tratava de um *software*. Como os alunos estavam tendo contato pela primeira vez com o GeoGebra, estas atividades iniciais foram realizadas com o objetivo de familiarizá-los gradativamente com o software além de motivá-los diante da potencialidade do GeoGebra em relação a vários conteúdos matemáticos. Para isso foram propostas atividades inicialmente mais simples, aumentando gradativamente o nível de dificuldade, ao conteúdo de sistemas lineares.

3. Resultado e discussão

Com o intuito de organizar melhor os dados para interpretação, foi criado um Quadro (ver Tabela 01), no qual especificamos a atividade realizada; quais os objetivos pretendidos; o resultado alcançado e as dificuldades encontradas pelos alunos com os registros de representação semiótica.

Tabela 01 - Resumo do resultado obtido junto aos alunos participantes

ATIVIDADES	OBJETIVOS	RESULTADOS	DIFICULDADES
01. Sistema de equações lineares.	Interpretação da solução de um sistema SPD a partir do registro gráfico.	Articulação do registro algébrico para o registro gráfico.	Relacionar a representação algébrica do sistema com a representação gráfica.

O estudo dos sistemas lineares se faz presente na matemática escolar desde o 7º ano do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio. Em geral, a ênfase dada no estudo dos sistemas, está relacionada com a sua representação algébrica e os tratamentos envolvendo os métodos para encontrar as soluções são baseados principalmente no uso de algoritmos. Silva (2013, p. 3) corrobora com esta afirmação ao observar que o estudo dos sistemas de equações lineares é tratado nos livros didáticos e na sala de aula, predominantemente enfatizando as representações e tratamentos algébricos "[...] sem ao menos ser mencionado sua solução geométrica ou a representação de uma equação de duas variáveis no plano", o que segundo o autor contribui para limitar a compreensão deste conteúdo.

Dentre os algoritmos mais utilizados para resolver sistemas lineares destacamos, no ensino fundamental, os conhecidos métodos: da adição, da substituição e da comparação, em que o sujeito utiliza técnicas algébricas e aritméticas para calcular o valor das incógnitas. Já no ensino médio, são introduzidos métodos matriciais para solução dos sistemas lineares. Entre eles destacamos a Regra de Cramer, o escalonamento e o método da eliminação de Gauss-Jordan.

O objetivo de propor uma atividade aos alunos envolvendo sistemas de equações lineares utilizando o GeoGebra foi verificar como os alunos interpretam os sistemas a partir da coordenação das representações gráfica e algébrica. Segundo Duval (2009, p. 72) o interesse em uma mudança de registro de representação semiótica dos objetos matemáticos "é que justamente podemos efetuar tratamentos totalmente diferentes num outro registro que naquele em que são dadas as representações iniciais".

Neste caso, procuramos enfatizar a possibilidade de um tratamento gráfico, utilizando para isso a interface do GeoGebra para encontrar a solução de um sistema com duas equações e duas incógnitas. O sistema escolhido para esta atividade possuía uma única solução, ou seja, tratamos de um sistema possível e determinado (SPD), composto das seguintes equações:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

Para iniciar a atividade com o uso do programa solicitamos aos alunos que digitassem primeiramente uma das equações no Campo de Entrada da interface do GeoGebra e, em seguida, digitassem a outra equação. Digitando as equações no Campo de Entrada e clicando na tecla ENTER do computador, o GeoGebra mostra automaticamente os gráficos das duas retas na Janela de Visualização no lado direito da interface e também as duas equações no lado esquerdo, na Janela de Álgebra, conforme mostrado na Figura 01.

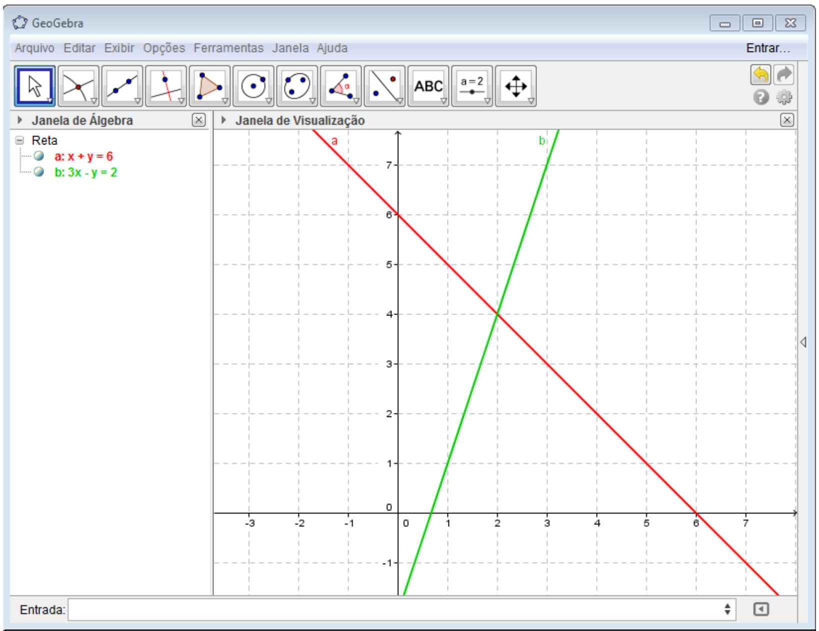

Figura 01 – Representação gráfica do sistema de equações.
Fonte – arquivo pessoal

De início os alunos não reconheceram as duas retas como sendo outra forma de representação do sistema dado no problema. Muitas vezes percebemos que é comum entre os estudantes não fazerem a relação entre uma equação e o objeto que ela representa. Relacionar uma equação com uma representação gráfica implica em uma mudança de registro de representação semiótica e a mudança entre registros não é obvia e, tampouco, natural. Duval (2009, p. 98) afirma que “A coordenação dos diferentes registros de representação ligados à objetivação ou ao tratamento dos conhecimentos não se opera espontaneamente, mesmo no decorrer de um ensino que mobiliza essa diversidade de registros”, principalmente nas atividades relacionadas com o ensino e aprendizagem de matemáticas. Segundo o autor, os tratamentos que uma figura possibilita “não são computacionalmente equivalentes aos raciocínios dedutivos que estabelecem um teorema (ou equação) no registro de uma escritura simbólica ou naquele da língua natural” (DUVAL, 2009, p. 72).

Continuando a atividade propus aos alunos que tentassem determinar a solução do sistema sem fazer “contas”, isto é, sem utilizar tratamentos algébricos, mas somente observando as retas que o representavam na tela do computador. Diante deste desafio, os alunos conjecturaram que seria possível encontrar a solução, todavia não sabiam por onde começar. Houve então um momento de diálogo entre os mesmos, sem muita interferência do pesquisador, na tentativa de identificar como encontrariam a solução do problema sem recorrer aos cálculos algébricos, mas apenas manipulando as ferramentas do GeoGebra.

Esta tarefa aparentava ser difícil demais e o que pudemos perceber é que os alunos não conseguiam visualizar uma relação ou significado algum quando comparavam a representação gráfica das retas na tela do computador e as equações algébricas do sistema. Apesar de o software mostrar as duas equações simultaneamente na Janela de Álgebra, ao lado da representação gráfica na forma de retas, percebi na atitude de alguns alunos que aquelas representações pareciam estar muito distantes para eles em seus significados e encontrar uma conexão ou equivalência entre elas parecia ser até mesmo impossível.

Gottschalk (2004), refletindo sobre as ideias da Wittgenstein, afirma que as proposições matemáticas nada descrevem no mundo empírico, não sendo possível verificá-las através de experimentos ou comparações com objetos palpáveis do mundo real. Nesse sentido, não é óbvio para um aluno que uma frase escrita em linguagem matemática como $x^2 + y^2 = 4$ represente uma circunferência cujo centro está na origem do plano cartesiano e que possui um raio igual a 2. Também não é evidente para o sujeito que a estrutura simbólica "$x + y = 6$" ou "$3x - y = 2$" represente alguma forma geométrica, no nosso caso, duas retas: cada uma delas sendo representada por uma das equações do sistema que estávamos estudando. Uma mudança de registro de representação também envolve o aprendizado de regras e dos usos que fazemos das representações dentro do outro registro. Nesse sentido, o uso que fazemos da regra matemática deve ser explicitado para o aluno e o professor é o principal mediador nesse processo. Assim, mudar o registro de representação é como aprender uma nova linguagem.

Após alguns minutos de diálogos e discussões entre os grupos, um aluno chegou a uma conclusão que parecia ser relevante. Todavia, expressar a sua conjectura não foi tarefa das mais fáceis. O aluno parecia procurar palavras e não encontrando a mais adequada para definir sua hipótese, levantou-se, cruzou os braços acima da cabeça e em voz alta fez a seguinte observação:

Aluno D: *É ali!... assim, professor!* – referindo-se ao ponto onde as duas retas se interceptam, como sendo a solução procurada.

Pesquisador: *Aqui?* – posiciona o ponteiro do mouse no cruzamento das retas.

Aluno D: *É, aí!*.

Pesquisador: *Que ponto é este?* – referindo-se ao ponto onde as retas se cruzaram (silêncio entre os alunos).

Neste momento nenhum dos alunos conseguiu definir formalmente utilizando a linguagem matemática que característica especial aquele ponto possuía, porém todos tinham uma forte convicção de que a solução para o problema realmente poderia estar no cruzamento das retas, conforme conjecturado pelo aluno D. Após algum tempo outro aluno resolveu então o problema chegando à conclusão que se tratava do "*ponto de intersecção entre as retas*".

De fato, a solução de um sistema possível e determinado (SPD) pode ser representada através do ponto de intersecção entre as retas que são geradas pelas equações que compõem o sistema. Este ponto é formado por um par ordenado que satisfaz simultaneamente as duas equações e, na representação gráfica, é o único ponto que pertence às duas retas, daí o motivo de podermos chamá-lo de "ponto de intersecção". No exemplo que ora analisamos as retas se cruzam no ponto (2, 4), ou seja, os valores que satisfazem as equações são x=2 e y=4.

Com o auxílio do GeoGebra, a solução foi encontrada utilizando o botão  (Intersecção de Dois Objetos). Clicando neste botão e em seguida em dois objetos, no nosso caso as duas retas, o programa mostra na Janela de Visualização o ponto onde as retas se interceptam e as suas coordenadas na Janela de Álgebra, como podemos observar na Figura 10.

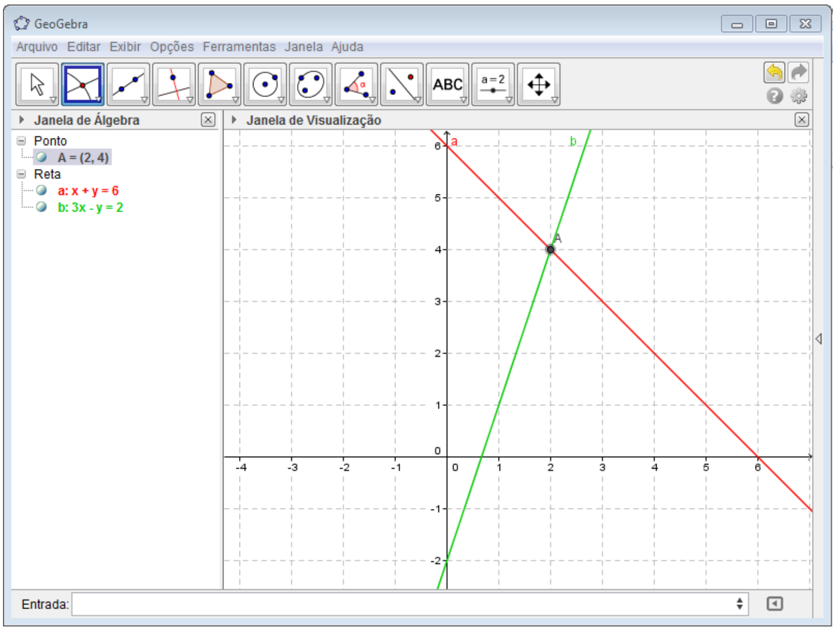

Figura 02 – Ponto de intersecção das retas a e b que representa a solução do sistema
Fonte – Arquivo pessoal

Após a resolução com o uso do programa, um dos alunos mencionou que ainda não havia entendido a solução, parecendo duvidar do resultado. Sentimos então a necessidade de verificar a validade de nossa suposição, isto é, a de que o valor das coordenadas do ponto de intersecção das retas satisfaziam as equações envolvidas no problema. Para isso utilizamos o algoritmo conhecido como método da adição para resolver o sistema por meio de tratamentos algébricos. O caminho percorrido até a solução pode ser observado a seguir:

i. Somando as duas equações, podemos observar que a incógnita y será cancelada, restando apenas a incógnita x, sendo possível determinarmos o seu valor:

$$\begin{array}{r} x + y = 6 \\ 3x - y = 2 \\ \hline 4x + 0y = 8 \end{array} \Longrightarrow x = \frac{8}{4} \Longrightarrow \boxed{x = 2.}$$

ii. Substituindo o valor que encontramos para a incógnita x em qualquer uma das equações, poderemos encontrar o valor de y. Escolhemos a primeira equação: $x + y = 6$

$$\Longrightarrow \quad 2 + y = 6 \quad \Longrightarrow \quad y = 6 - 2$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y = 4.}$$

Assim, através de tratamentos algébricos, verificamos que o par ordenado correspondente às coordenadas do ponto A=(2, 4), encontrado pelos alunos com a manipulação das ferramentas do GeoGebra, é a solução do sistema.

Um fato que nos chamou a atenção durante as atividades foi uma resposta dada pela aluna A ao mencionar que o uso do GeoGebra lhe auxiliou a compreender o que era o conceito de intersecção. Vejamos o relato do alunos A em relação ao conteúdo apresentado com o uso do software GeoGebra, mostra a importância a questão ao registro de representação semiótica na matemática ao relatar “o assunto que eu menos compreendia era intersecção e ficou mais fácil entender a visualização no processo”. Ademias o recurso do software proporciona uma interação dinâmica com os conceitos apresentados.

Conjecturamos que talvez a ideia que a mesma tivesse sobre o conceito de intersecção estivesse limitada apenas à Teoria dos Conjuntos, tratada nos livros didáticos e na sala de aula predominantemente por meio de representações utilizando os diagramas de Venn ou através da enumeração dos elementos de um conjunto entre chaves. Porém, em matemática o conceito de intersecção não está limitado apenas a estes dois contextos. Por exemplo, em se tratando de retas concorrentes, o ponto onde elas se cruzam também é uma intersecção, já que o ponto onde as retas se cruzam pertence simultaneamente às duas retas.

> É preciso que o sujeito seja capaz de atingir o estado de coordenação de representações semioticamente heterogêneas, para que ele possa discriminar o representante e o representado, ou a representação e o conteúdo conceitual que essa representação exprime, instancia ou ilustra (DUVAL, 2009, p. 82).

Conforme já mencionamos neste trabalho de investigação, uma coordenação entre diferentes registros de representação mostra-se necessária para que haja a compreensão do conceito, isto é, do conteúdo matemático envolvido, pois o objeto representado se confunde com a representação o que dificulta o estagio do desenvolvimento o engajamento do aluno a proposta de resolver problemas nas aulas de matemática.

4. Considerações finais

Com relação aos conteúdos Borba e Penteado (2010) mencionam que dependendo das mídias utilizadas em uma aula de matemática alguns aspectos dos conteúdos matemáticos podem ser favorecidos em detrimento de outros. É o caso, por exemplo, das representações gráficas.

Sobre o uso de tecnologias informáticas no ambiente escolar, realizamos algumas reflexões enfatizando alguns aspectos que julgamos pertinentes para a pesquisa, que mostram o potencial das mídias informáticas para o ensino e aprendizagem da matemática. Vimos que as tecnologias informáticas podem ser usadas para auxiliar o aluno na construção do conhecimento e que as mídias evoluem assim como evoluem as sociedades. Partindo dessa premissa, vimos que o conhecimento é construído principalmente por seres humanos com mídias. Isto é, sempre existe uma dada mídia envolvida durante a elaboração e sistematização de um conhecimento. Como exemplo, mencionamos o uso da escrita através do lápis e papel. Nesse sentido, observamos que não devemos ignorar a presença de novas mídias no ambiente escolar, representadas atualmente pelas tecnologias informáticas, no caso em que nos propomos investigar, *softwares* voltados para o ensino de matemática.

Como nosso objetivo neste trabalho não é discutir como os alunos compreendem a intersecção em matemática, não nos deteremos em maiores detalhes sobre este conteúdo, ficando com sugestão para futuros trabalhos. Apenas mencionamos esta resposta da aluna, pois ela evidencia que a articulação entre diversas representações semióticas favorece a compreensão em matemática e que o uso do GeoGebra possibilitou o aprendizado de um conteúdo que não era o objetivo principal da atividade. Observando o relato da mesma ao referir-se à "visualização de todos os processos" podemos inferir que relacionar a solução do sistema com o auxílio do *software* através da visualização gráfica na tela do computador auxiliou no processo de generalização do conceito de intersecção pelo sujeito.

5. REFERÊNCIAS

BELINE, William; COSTA, Nielce Meneguedo Lobo da. **Educação Matemática, tecnologia e formação de professores:** algumas reflexões. Campo Mourão: Editora da FECILCAM, 2010. p. 153 – 169.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa Segundo a Abordagem Fenomenológica. In: ARAÚJO, Jussara de Loiola; BORBA, Marcelo de Carvalho. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. pp. 101 - 114.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.** 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. 104 p.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorim. **Representações Semióticas no Ensino: Contribuições para Reflexões Acerca dos Currículos de Matemática Escolar.** 2008, 252 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2008.

DAMM, Regina Flemming. Registros de representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). **Educação Matemática:** Uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010. p. 167 - 188.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais***.* Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 120 p.

GOTTSCAHLK, Cristiane. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Cadernos de**

História e Filosofia da Ciência, Campinas, Série 3, v. 14, n. 2, pp. 305 – 334, jul. – dez. 2004.

PURIFICACÃO, Ivonélia C. da. Prática docente de professores que ensinam matemática com o uso do software Cabri-Géomètre: *O novo e o desafio.* In:

SILVA, Michelsch João da. Contribuições do uso de Representações Semióticas no Ensino de Sistemas de Equações no Ensino Fundamental. **In:** XVII Encontro Nacional de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2013, 12p.

VALADARES, Eduardo de Campos; CHAVES, Alaor S.; ALVES, Esdras Garcia. *Aplicações da física quântica: do transistor à nanotecnologia.* São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005. 90 p.