GEOMETRIA FRACTAL: EXPERIÊNCIAS PEDAGÓGICAS E APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

Jefferson Pantoja Ferreira[1], Alan Gonçalves Lacerda[2]

RESUMO
Esse artigo aborda uma apresentação sucinta do surgimento dos fractais e a importância da sua descoberta para ciência, arte e tecnologia, bem como a realização de uma oficina sobre fractal realizado pelo primeiro autor deste artigo sob a orientação do segundo. Estas ações integram o projeto do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID/UFPA). Dentre os teóricos utilizados destacamos Barbosa (2002), Almeida (2007), Fuzzo (2009), Rabay (2013) para o ensino de matemática e quanto a abordagem histórica e propriedades dos fractais destacamos Carreira (2015), Mandelbrot (1989), Feder (1988) e Dauben (1979). Participaram desta oficina 25 alunos dos Cursos de Matemática e Ciências Naturais. Propomos como atividades o uso de cartões de papel para criar fractais, na qual os próprios alunos fizeram as construções, com isso exploramos as inúmeras possibilidades de desenvolver vários ramos da matemática, destacando um deles a disciplina Progressão Geométrica (P.G). Os resultados apontaram: (a) que a abordagem de geometrias não euclidianas pode viabilizar a motivação para os alunos em formação; (b) o uso de demonstrações para aquisição da linguagem matemática e do conteúdo de progressão geométrica.

PALAVRAS-CHAVES: Fractal. Matemática. Oficinas. PIBID.

[1] Licenciando em Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA) – Campus Universitário Marajó-Breves. E-mail: guitarjeffinho@gmail.com.
[2] Doutorando em Educação em Ciências e Matemáticas pela UFMT/UFPA/UEA - REAMEC. Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela UFPA. Professor da UFPA – Campus Breves. E-mail: alanlacerda@ufpa.br.

1 Introdução

Apresentamos a seguir os estudos que integram o projeto intitulado "Pesquisas em Educação Matemática na Formação de Professores: Metodologias e Perspectivas para o Marajó/Breves" do PIBID/UFPa (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência). Na ocasião foram realizadas oficinas juntos aos alunos do curso de matemática e ciências naturais sobre a geometria fractal. A fim de se convencer que tal geometria merece os debates nas salas de aulas, que estão presumidamente admitidos ao cotidiano dos alunos. Neste sentido, temos como problemática: como a geometria fractal pode auxiliar o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos? Como as demonstrações em matemática podem viabilizar as construções do conhecimento matemático? Os únicos recursos disponíveis é sempre alvo de imagens que servem mais como ilustração do que poderia ser interpretado ou apontado sobre as construções sob os signos escritos, que no caso especifico será abordado pela confecção de papel A4 para explorar conceitos de progressão geométrica. Há uma dificuldade recíproca com as demonstrações em matemática. Para tanto objetivamos, contrastar demonstrações que poderiam ser articuladas ao educar matematicamente, da qual entendemos como o caminho para as produções escritas. Isso corresponde à visão da linguagem na atualidade que vem sendo implementada a educação matemática como a busca de novas práticas metodológicas para o ensino e aprendizagem de matemática.

2 Um breve histórico da geometria fractal

A partir metade do século XIX e XX percebeu-se que não era possível utilizar a geometria Euclidiana para descrever toda natureza, daí surgiram os primeiros anúncios dessa nova geometria não-euclidiana. Certos fenômenos da natureza ou objetos que não possuem forma definida foram vistos como "monstros matemáticos" ou patologias que desafiava as noções comuns de infinito (ALMEIDA, 2007). Transformar algo como Galileu Galilei definiu com tanta veemência dizendo que o alfabeto da natureza eram os círculos, triângulos e demais figuras euclidianas, foi uma mudança bastante significativa para o ensino da matemática.

Segundo Lesmoir-gordon *et al, (*2000, p.9):

> As formas que Euclides – linhas diretas e círculos – provaram tão próspera explicação do universo que os cientistas ficaram cegos às limitações deles,

> classificando as formas que não se encaixavam dentro do esquema de Euclides como 'não intuitivas' e até 'patológicas' (tradução nossa).

A geometria clássica são as linhas e os planos, os círculos e as esferas, os triângulos e os cones que representam uma poderosa abstração da realidade, servindo as correntes filosóficas de aspirações formalistas e platônicas.

> O matemático János Bolyai (1802-1860) publicou em 1832 os resultados de sua pesquisa sobre geometrias não-euclidianas como um apêndice a um trabalho volumoso de seu pai, o matemático Farkas Bolyai. E Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) publicou em russo o primeiro artigo sobre geometria não-euclidiana no Karzain Bulletin. Com intuito de provar Quinto Postulado de Euclides admitiu que isto seria impossível, surgindo assim uma nova geometria, hoje conhecida como geometria hiperbólica. (CRUZ, 2015, p.2).

Daí surgiu os primeiros fenômenos como: poeira de Cantor, curva de Peano curva de Koch, triângulo de Sierpinski e etc., cada um intitulado com o nome do seu criador. Mas apenas em 1975 o emprego do termo *fractal* pode ser encontrado quando o matemático polonês Benoit Mandelbrot pela primeira vez dele fez uso, quando na iminência da completude da sua primeira grande obra sobre o assunto "The Fractal Geometry of Nature" foi catalogada (MANDELBROT, 1975). Vale ressaltar que Mandelbrot não criou essa geometria, apenas nomeou, sendo na atualidade considerado por muitos cientistas com o "Pai" da Geometria Fractal, pois criou o Conjunto de Mandelbrot considerado pelos matemáticos o conjunto mais complexo da matemática. Segundo Barbosa (2002) se referindo a Mandelbrot, a definição da palavra fractal do latim *fractus*, cujo verbo *frangere* corresponde a quebrar; criar fragmentos irregulares, fragmentar. Em relação à definição de fractal esclarece Mandelbrot (1989) que a figura real deva se assemelhar com a figura geométrica que constitui o todo. Para Feder (1988) "um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos". As principais propriedades que definem um fractal, são auto-semelhança, a complexidade infinita e a sua dimensão.

Para Carreira, (2015) auto-semelhança é a simetria através das escalas. Consiste em cada pequena porção do fractal poder ser vista como uma réplica de todo o fractal numa escala menor, ou seja, quanto mais diminuir o fractal ele não perde a sua simetria. Em relação à dimensão dos fractais ao contrário do que sucede na geometria euclidiana, não é necessariamente uma quantidade inteira.

Com efeito, ela é uma quantidade fracionária. A dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço, que tem a ver com o seu grau de irregularidade (CARREIRA, 2015).

Portanto, a ideia de dimensão dada por Poincaré com base nos fundamentos euclidianos, em que ponto tem dimensão 0, a reta tem dimensão 1, a superfície tem dimensão 2 e uma porção no espaço tem dimensão 3, agora já não é aceita pelo fractais, pois a dimensão é fragmentada, na qual satisfaz os números não inteiros e irracionais.

Niels Fabian Helge von Koch matemático sueco, descreveu um dos primeiros fractais denominado Floco de Neve de Koch ou curva de Koch. A sua construção se inicia substituindo o terço central de cada um dos lados, supostos cada um de comprimento unitário, por outros dois segmentos com comprimentos de 1/3, formando-se uma estrutura triangular equilátera, sem a base que justamente corresponderia à porção removida (ASSIS, 2008). Algumas propriedades que versam os fractais do Floco de Neve de Koch:

I. No limite, a curva não apresenta tangente em ponto algum.
II. Embora ela se inicie a partir de uma reta de comprimento L, seu comprimento é infinito.
III. Note que uma curva de comprimento infinito pode ser colocada em uma área finita.

Observe a sua construção pelo processo interativo feito em computador.

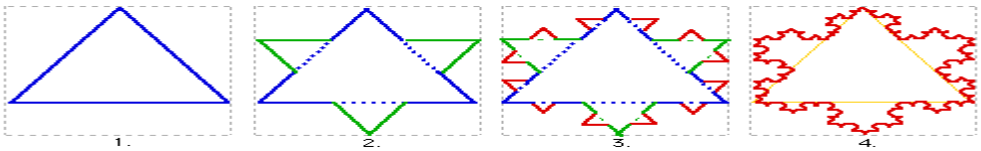

Figura 1 – Floco de neve
Fonte: Imagem extraída de Almeida (2007)

O Triângulo de Sierpinski foi descrito por Waclav Sierpinski matemático polonês, uma curiosidade sobre Waclav é que ele teve uma enorme reputação, a ponto de ter seu nome em uma das crateras lunares (BARBOSA, 2002 p. 41).

Ele é uma das formas elementares da geometria fractal por apresentar algumas propriedades tais como:

I. Ter tantos pontos como o conjunto dos números reais;
II. Ter área igual à zero;

III. Ser auto-semelhante;

IV. Não perde a sua definição inicial à medida que é ampliado.

A sua construção dá-se por processo recursivo. Segue os procedimentos por RABAY (2013).

I. Considere um triângulo equilátero;

II. Ligue os pontos centrais de cada lado. Dividindo o triângulo em quatro triângulos iguais, retire o triângulo central;

Considere os triângulos restantes e retorne para o Passo 2.

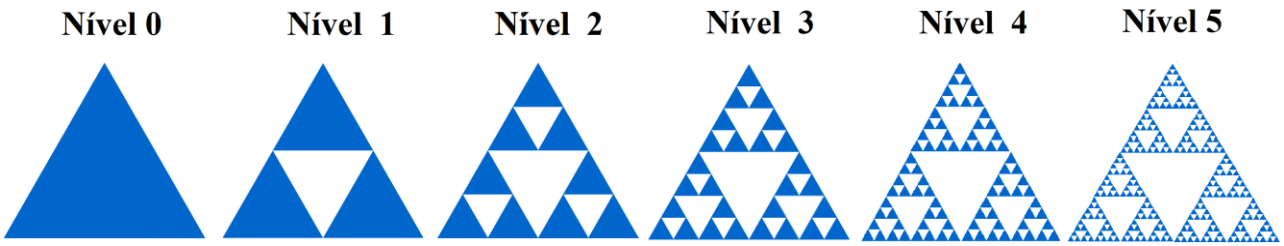

Figura 2 – Triângulo de Sierpinski
Fonte: Imagem extraída de Rabay (2013)

Georg Cantor (1845-1918), matemático de origem alemã destacou-se por apresentar ideias altamente inovadoras sobre o conceito de infinito, também foi o formulador da teoria dos conjuntos, propôs a construção de um objeto que resultou chamar-se de conjunto de Cantor ou “Poeira de Cantor” (DAUBEN, 1979).

A Poeira de Cantor é um subconjunto do intervalo $[0,1]$ com o limite de um processo iterativo. A seguir mostraremos os passos para sua criação que versa Barbosa (2002, p. 25-26) para implementação nas aulas de matemática:

I. No passo 0, considera-se o intervalo $[0,1]$;

II. No passo 1, retira-se o terço do meio do intervalo $[0,1]$;

III. No passo 2, retira-se o terço do meio de cada um dos dois intervalos criados pelo passo 1, $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$;

IV. No passo n, retira-se o terço do meio de cada um dos intervalos criados pelo passo $n - 1$.

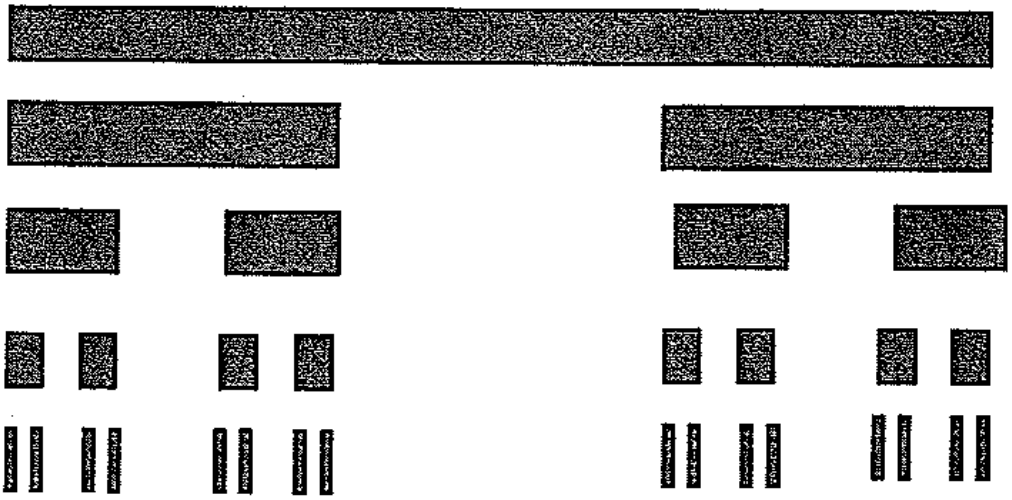

Figura 3 – Conjunto de Cantor
Fonte: Imagem extraída de Barbosa (2002)

Barbosa (2002) sugere outras aplicações do fractal para o ensino nas aulas de matemática. O que requer o uso de novas tecnologias de informação e comunicação, correspondente com as novas diretrizes para Educação Matemática. Na atualidade tem sido um desafio para o exercício do magistério, especialmente à Educação Básica.

3 Procedimentos metodológicos

A compreensão das limitações da formação inicial no que tange as novas práticas pedagógicas, especificamente aos professores que ensinam matemática são um dos objetivos a construção desse estudo: (a) a importância da inclusão da geometria não-euclidiana; (b) a aprendizagem de conceitos matemáticos através da geometria fractal.

Diante disso, foram propostas oficinas sobre a geometria fractal aos alunos em formação. As ações destas oficinas integram o Projeto intitulado “Pesquisas em Educação Matemática na Formação de Professores: Metodologias e Perspectivas para o Marajó/Breves” ao PIBID/UFPA (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência), que tem como coordenador o professor Alan Lacerda.

Sendo assim, foi realizado no auditório da Universidade Federal do Pará, Campus Universitário do Marajó-Breves atividades sobre como aborda a geometria fractal em sala de aula. Aos 25 alunos participantes, (13) do curso de Matemática e (12) do curso de Ciências Naturais foi apresentado um pouco sobre o histórico das

geometrias não-euclidianas e sua importância na aprendizagem de novos conceitos em matemática.

Logo após essa explanação foi orientado a construção dos fractais em papel A4 (construção de Fractal no Papel A4), com o intuito de comtemplar a Progressão Geométrica. Nesta apresentação recorremos a slides, abordando dentre os temas: a existência de outras geometrias, curiosidades, aplicações em outros ramos da ciência, cálculo dimensional e demonstrações, com a finalidade de mostrar sua importância no ensino e aprendizagem de matemática.

4 Resultados e discussões

Nos estudos realizados por Almeida (2007), observamos as atividades de construções de fractais por meio do uso do papel A4, uma alternativa de ensinar a geometria fractal e o conteúdo de progressão geométrica, evidenciando suas propriedades, aplicações de leis e definições. Esses cartões resultam de uma sequência de cortes (linhas grossas) e dobraduras (linhas pontilhadas) que na sua finalização transformará de uma dimensão $R^2 \rightarrow R^3$ (ver figura 4).

Escolhemos o assunto de Progressão Geométrica (P.G) ao observamos o tratamento dados nos livros didáticos sem qualquer possibilidade de articulação com a geometria fractal. Sendo assim, buscamos evidenciar algumas demonstrações dos fractais, tendo em vista, que seu estudo na Educação Básica é limitado, e quando se é tratado o conteúdo, limita-se a um aspecto visual, não fazendo referência as notações matemáticas. As proposições matemáticas são imprescindíveis para Educação Matemática.

O uso da geometria fractal através da construção de cartões tridimensionais contempla ainda o lado lúdico e criativo dos educandos, demonstrando aspectos físicos na natureza constituídos por fractais, desenvolvendo o raciocínio lógico, apresentando a evolução da geometria, relacionando os conteúdos matemáticos que possam ser desenvolvidos na educação básica e familiarizando os mesmos aos estudos mais aprofundados e aos conceitos da geometria e outras aplicações. Os resultados apontaram à motivação dos alunos nas construções de cartões e a compreensão de conceitos matemáticos aos conteúdos de P.G (o termo geral, razão de semelhança, ampliação, redução e infinito).

O conteúdo de P.G quase sempre é introduzido por fórmulas e algoritmos em seus estudos, o que dificulta a aprendizagem dos alunos. Na linguagem matemática

a necessidade de operar com os signos escritos, pois a mesma envolve a compreensão de regras algorítmicas e notações simbólicas. As atividades com o uso do material concreto podem auxiliar as construções das formalizações em matemática.

A atividade de construção de fractais tridimensionais em papel apresentou a geometria fractal em etapas de construções das fórmulas e propriedades. Para Assis (2008) a importância dos fractais está em servir a ciência, arte e tecnologia. Atividades essas que cada vez mais tem sido solicitada a criatividade humana.

A seguir procederemos à construção no papel A4 do *Triângulo de Sierpinski* (ver Imagem 1) conforme sugestão de Rabay (2013) que orienta aos passos:

Passo 1: Dobrar as duas folhas de papel ao meio. Reservar uma folha.

Passo 2: Marcar a partir da dobra, uma reta com metade do comprimento da largura da parte dobrada.

Passo 3: Faça um corte nessa marca.

Passo 4: Dobre para dentro a parte superior.

Passo 5: Anote os dados no quadro. Para contar os volumes criados, será necessário desdobrar a folha.

Passo 6: Repita os passos 2 ao 4, quantas vezes seja possível cortar e dobrar.

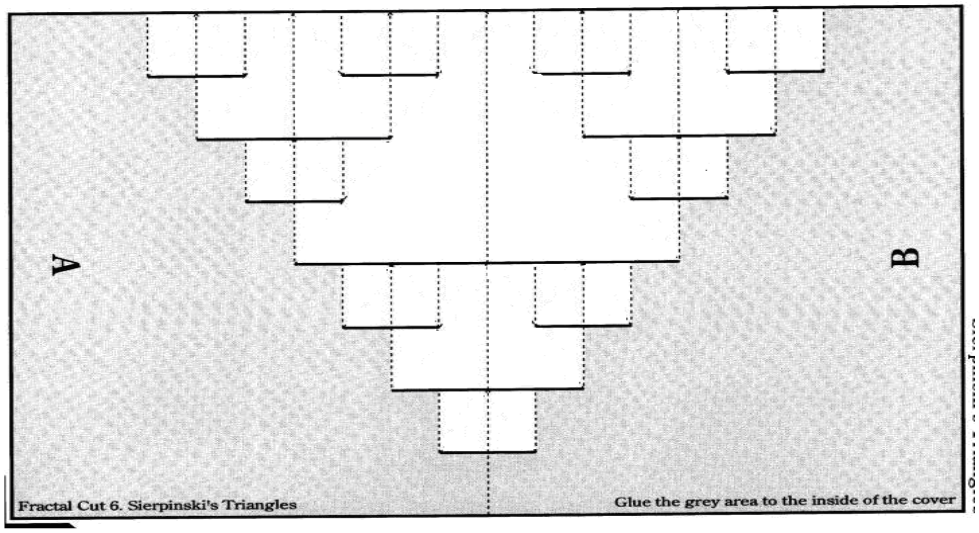

Figura 4 – Planificação do cartão (Triângulo de Sierpinski)
Fonte: Imagem extraída de Almeida (2007)

Segundo Almeida (2007, p. 17):

> Por ser um tema atual e amplo, a exploração da geometria dos fractais permite tornar a aula de matemática um espaço propício para aprendizagem, que une aspectos lúdicos da manipulação do cartão com a abordagem de conceitos matemáticos. É possível ainda investigar, a partir de tópicos da matemática tradicional, conceitos mais elaborados que podem servir como introdução para um conteúdo futuro, como séries e limites.

Para Rabay (2013) o estudo dos fractais em sala de aula traz a compreensão para os alunos de como os diversos elementos da própria natureza são percebidos, pois montanhas não são cones, raios não são retas. Com isso, desencadeando o exercício analítico da matemática aplicada, abordada em diferentes níveis, com intuito de provocar aos acadêmicos em formação outros olhares sobre as suas práticas pedagógicas.

Após a explanação sobre os fractais, os acadêmicos foram instruídos para a construção dos cartões tridimensionais de papel A4. Abaixo segue o desenvolvimento de cada passo (Ver imagem 1):

Passo 1: Dobre uma folha de papel A4 ao meio, em seguida com uma régua meça a sua altura h e seu comprimento c.

Passo 2: Corte no ponto médio do comprimento c até a metade da altura h.

Passo 3: Dobre o um dos lados, formando um vinco na dobradura.

Passo 4: Repita o passo 2 e 3, só que agora corte no ponto médio c/2 até altura h/4.

Passo 5: Repita os passos anteriores quantas vezes forem possíveis.

Passo 6: Por fim, desdobre todos os retângulos criados para dentro. Caso queira deixar rígido e decorativo o fractal, cole atrás uma folha de papel colorido.

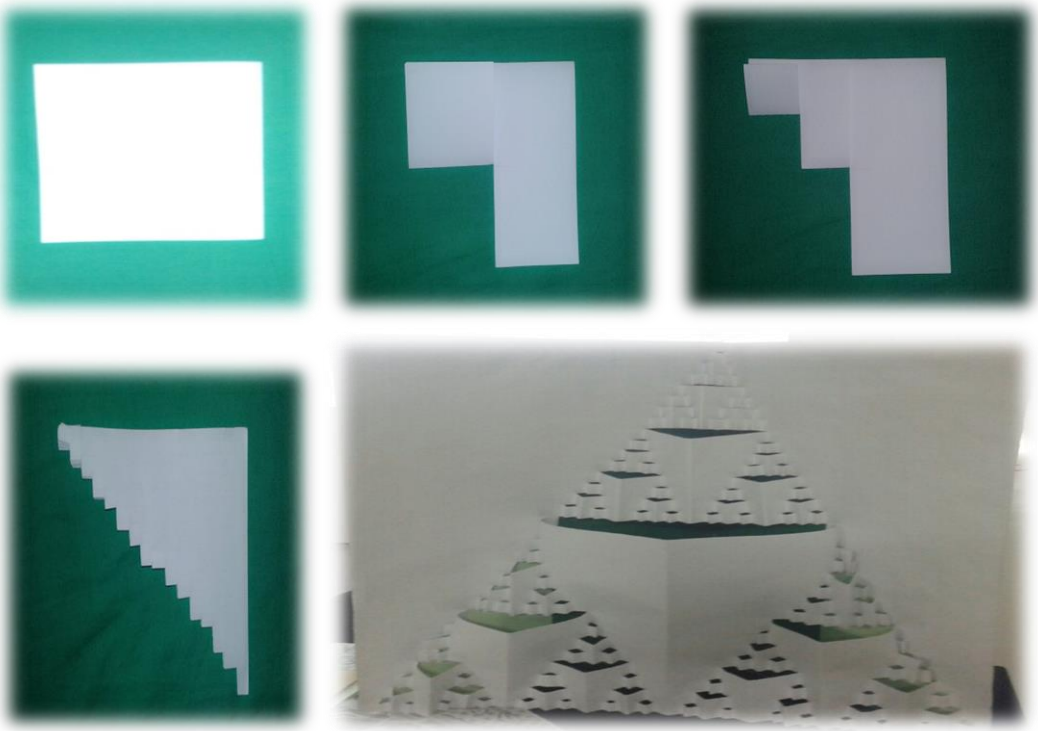

Imagem 1 – Processo de construção do fractal em papel A4, com os respectivos passos (1), (3), (4), (5) e (6).
Fonte: Arquivos pessoais

Outra observação é que à medida que vamos construindo os passos das atividades, se vai procedendo as realizações das etapas das construções do algoritmo e fórmulas. Os alunos observam que a cada interação triplica-se o número de novos paralelepípedos, dessa forma pode-se concluir que os paralelepípedos gerados, seguem a lei de potência 3^n, onde $n = [0, +\infty[$ será o número da iterações.

Calculando a área do triangulo, tendo como análise a Imagem 1:

Dado um triângulo equilátero de lados 1 cm, temos:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \text{ e } A_t = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_t = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Fazendo a primeira interação, quando tomamos $t = 0$, temos que:

$$A_0 = \frac{1^2\sqrt{3}}{4}$$

Continuando a calcular as interações:

$$A_1 = \frac{3^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

$$A_2 = \frac{3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{64}$$

Logo, obtemos n interações:

$$A_n = \frac{3^n\left(\frac{1}{2^n}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3^n\sqrt{3}}{4^{n+1}}$$

Portanto, podemos concluir que chegamos a uma progressão geométrica, onde $a_1 = 1$ e sua razão $q = 1/2$. Se calculássemos soma dessa P.G, encontraríamos a mesma área do triângulo inicial. Isso nos levar afirmar que, se tivéssemos um triângulo e fossemos retirando os novos triângulos gerados pelas interações deste fractal a área resultante seria zero. Observamos ainda, as construções no papel A4, das demonstrações que compõem o ensino e aprendizagem de matemática, onde na maioria das vezes é tida como impasse a construção do conhecimento matemático.

Se tomarmos um segmento de reta n e dividirmos utilizando a propriedade de auto-semelhança em p partes iguais, em que as escalas tenham uma razão r. Obtemos a seguinte expressão, com o número de segmentos:

$$n = \frac{1}{r}$$

Da mesma forma, tomemos um quadrado dividindo p partes iguais de cada uma dos seus lados. Obtém-se p^2 quadrados similares ao todo.

Logo, $p^2 = n$**,** relacionando n e r temos:

$$n = \frac{1}{r^2}$$

Caso realizássemos o mesmo procedimento a um cubo, obteríamos:

$$n = \frac{1}{r^3}$$

Analisando cada expressão, chegamos à fórmula geral, $n = \frac{1}{r^D}$, em que n representa os números de réplicas, r razão de semelhança e D a dimensão espacial.

Agora aplicamos o logaritmo em ambos os membros:

$$\ln n = \ln \frac{1}{r^D}$$

Aplicando a propriedade logaritmo de um quociente, temos:

$$\ln n = \ln 1 - \ln r^D$$
$$\ln n = 0 - \ln r^D$$

Aplicando a propriedade de uma potência, temos:

$$D \ln r = -\ln n$$
$$D = -\frac{\ln n}{\ln r}$$

Daí, concluísse o cálculo para dimensionar um objeto fractal em que n será o número de cópias do objeto original e r é o fator de resolução.

A demonstração acima mencionada por Murr *et al* (2005), relata sobre o método de Homoteia ou de Auto-similaridade para o cálculo de dimensão fractal, este método permite calcular a dimensão de alguns objetos, que resultam em um número fracionário, uma das características é a extensão do conceito de dimensão topológica. Existem ainda outros métodos que também pode ser explorados como intuito de calcular a dimensão fractal, tais como: dimensão de contagem de caixas e dimensão de Hausdorff-Besicovitch.

5 Considerações finais

Percebemos uma variedade de conteúdos que podem ser estudados pela geometria fractal como: áreas, volumes e perímetros, iteração de funções, trigonometria, progressão geométrica, semelhança de figuras (razão de semelhança, ampliação, redução, razão entre áreas e volumes de figuras semelhantes), operações com conjuntos, conteudos estes que intergram os manuais didáticos e orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998).

A geometria fractal ainda é pouco conhecida na sala de aula por professores e alunos por ser um estudo relativamente recente, embora se reconheça nela o uso de recursos computacionais (jogos eletrônicos, animações 3D, softwares matemáticos) imprescindíveis na atualidade, onde fazer uso de tais recursos computacionais tem sido o desafio para os profissionais da educação. Dessa forma, esta pesquisa objetiva apresentar possibilidades da inclusão da Geometria Fractal

na Educação Básica e a formação dos futuros profissionais ao exercício do magistério.

Os resultados trouxeram reflexões para se pensar aos processos de ensino e aprendizagem de matemática, como também demonstrar a defasagem de conhecimento em alguns educandos, com relação à Geometria Clássica, conceitos e definições que são ensinados aos currículos como crenças muito enraizadas. Propondo atividades que possam ajudar as construções ao domínio da escrita em matemática contribuindo com a formação do educador matemático que precisa articular as competências e habilidades em matemática com as práticas pedagógicas.

6 Referências

ALMEIDA, T. B.; MARTINELLI, R. O.; RODRIGUES, V. M.; SILVA, A. M. M.. Fractais no ensino fundamental: Explorando essa nova geometria. **In:** IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, v. 1. Belo Horizonte. Anais do IX ENEM, 2007. p. 1-18.

ASSIS, T. A.;V.; MOTA, F. B.; ANDRADE, Roberto Fernandes Silva; CASTILHO, Caio Mário Castro de. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física** (Impresso), v. 30, p. 2304.1-2304.10, 2008.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal:** para sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Secretaria de Educação Fundamental Brasília, 1998.

CARREIRA, A.S.N et. al. Fractais. Disponível em: http//:www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm24/principal.htm> Acessado em 11 de Março de 2015.

CRUZ, G. P. **Fractais:** padrões complexos de incrível beleza. Disponível em <http://www.unifafibe.com.br/revistasonline/arquivos/hispecielemaonline/sumario/17/30032011214317.pdf acessado no dia 09/03/2015 Acessado em 10 de Março de 2015.

DAUBEN, J. W. **Georg Cantor**: His Mathematics and Philosophy of the Infinite Cambridge, Massachusetts, 1979.

FEDER, J. **Fractals.** New York: Plenum Press, 1988.

FUZZO, R. A.; SANTOS, T. S.; REZENDE, V.. Fractais: algumas características e propriedades. **In**: IV Encontro de Produção Científica e Tecnológica - EPCT, 2009, Campo Mourão. IV Encontro de Produção Científica e Tecnológica - EPCT, 2009.

LESMOIR-GORDON, N.; ROOD, W. and EDNEY, R. **Introducing Fractal Geometry**. Cambridge: Icon Books, 2000.

MANDELBROT, Benoit B. **The Fractal Geometry of Nature**. New York: W.H. Freeman and Company, 1975.

MANDELBROT. Benoit B. **Objetos Fractais**. Lisboa: Gradiva, 1989.
MURR, C. *et al.* **Fractais**: propriedades e construção. Disponível em: < http://people.ufpr.br/~ewkaras/ic/geralic2003.pdf >. Acesso em 10 de Março de 2015.

RABAY, Yara S. F. **Estudo e aplicações da Geometria Fractal.** João Pessoa: 2013 (Dissertação de mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.