ESPAÇOS DE HILBERT

Resumo

Neste trabalho daremos ênfase ao estudo dos Espaços de Hilbert. Para isso serão apresentadas e discutidas as definições e propriedades de Espaço Vetorial e Espaço com Produto Interno. Neste sentido será mostrado um exemplo que satisfaz a definição da Forma Bilinear e do Produto Interno. Vale ressaltar que todo produto interno é uma Forma Bilinear, mas nem toda Forma Bilinear é um Produto Interno. Serão também expostos os conceitos de Norma e de Espaço Normado, nos seus exemplos serão usados a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e através das propriedades de Norma e Produto Interno será mostrada a lei do paralelogramo. Sequência de Cauchy, Espaço Métrico Completo e Espaços de Banach são os conceitos que completam a definição de Espaço de Hilbert, os quais são fundamentais para evidenciar as suas diferenças com os espaços de Banach. A partir de todos esses conceitos serão feitas aplicações para identificar quais Espaços podem ser caracterizados como Espaço de Hilbert, como por exemplo, o espaço l^2 das sequências dos quadrados somáveis e um contra exemplo será o Espaço l^p com p diferente de 2 que não é um espaço de Hilbert.

Palavras-chave: Espaço vetorial. Produto interno. Sequência de Cauchy. Norma. Espaços de Hilbert.

1 Introdução

A Análise Funcional é o ramo da Matemática, e mais especificamente da Análise Real, que trata do estudo de espaços de funções. Tem sua história no estudo de equações diferenciais e integrais e da Transformada de Fourier. A modelagem foi de grande impulso para o avanço da Análise Funcional, durante o século XX, devida a John Von Neumann, da mecânica quântica em espaços de Hilbert. Espaços de Hilbert foi discutido primeiramente por volta de 1912 pelo brilhante matemático Alemão David Hilbert, quando trabalhava em equações integrais. Nascido em Königsberg, na Prússia Oriental, hoje cidade de Kaliningrado, na Rússia. Doutor pela Universidade de Konigsberg (1884), onde também foi professor (1886-1895). Famoso como renomado professor de geometria euclidiana na Universidade de Göttingen (1895-1930), onde deu continuidade à brilhante tradição matemática de Gauss, Dirichlet e Riemann. Neste trabalho, será feito um estudo sobre espaços de Hilbert que é uma generalização de espaços euclidianos pelo fato de não estar restrito a um número finito de dimensões.

2 Conceitos Preliminares

Inicialmente serão apresentados alguns conceitos e propriedades de importância crucial para a definição de Espaços de Hilbert, tais como: Espaço Vetorial, Espaço com Produto Interno, Norma e Espaço Normado.

2.1 Produto Interno

Definição 2.1 Diz-se que V é um espaço vetorial sobre K quando as operações (+) e $(\cdot)$ satisfazem as seguintes propriedades:

i) $(u+v)+w = u+(v+w)$.

ii) $u+v = v+u$.

iii) $\exists\, 0 \in V$ tal que $u+0 = u$ (0 é o vetor nulo).

iv) $\exists - u \in V$ tal que $u+(-u) = 0$ (elemento simétrico).

v) $\alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v$

vi) $(\alpha+\beta).v = \alpha.v + \beta.v$

vii) $(\alpha\beta).v = \alpha.(\beta v)$

viii) $1.u = u$ (1 elemento neutro multiplicativo).

Definição 2.2 Seja V um espaço vetorial. Um produto interno em V é uma função binária com uma aplicação $\langle , \rangle : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ que a cada par de vetores u e v, associa um número real, denotado por $\langle u, v\rangle$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle; \quad \forall u, v \in \mathrm{V}$ (simétrica)

2. $$\left.\begin{array}{l} i)\ \langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle;\ \ \forall\, u, v, w \in \mathrm{V} \\ ii) \langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle;\ \ \forall\, u, v, w \in \mathrm{V} \\ iii)\ \langle \alpha u, v\rangle \ = \alpha\langle u, v\rangle = \langle u, \alpha v\rangle;\ \ \forall\, u, v \in \mathrm{V},\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{(bilinearidade)}$$

3. $\langle u,u\rangle \geq 0 \left\{ \begin{array}{l} se\ \langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0 \\ se\ \langle u,u\rangle > 0 \Leftrightarrow u \neq 0 \end{array} \right\}$ (positividade)

No caso de uma aplicação $\langle,\rangle : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{C}$ é importante observar que em um espaço vetorial sobre o corpo do complexo, o produto interno possui a propriedade de simetria Hermitiana, dada por, $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$, que é necessária para garantir a propriedade de positividade. Deste modo, da propriedade 1) e 3) resulta que o produto interno é linear conjugado na segunda variável. De fato, seja o elemento $iu \in V$, em que o produto interno não é linear conjugado na segunda variável, tem-se,

$$\langle iu, iu\rangle = ii\langle u,u\rangle = i^2\langle u,u\rangle = -1\langle u,u\rangle < 0.$$

Não satisfazendo a propriedade 3), pois $\langle u,u\rangle > 0$.

Agora, considerando a propriedade simétrica hermitiana em que o produto interno é linear conjugado na segunda variável, obtem-se,

$$\langle iu, iu\rangle = \langle iu, \bar{i}u\rangle = i\bar{i}\langle u,u\rangle = \langle u,u\rangle > 0.$$

A qual satisfaz a propriedade 3).
Mostrando assim, que $\mathbb{C}$ proveniente da propriedade simétrica hermitiana, define um espaço com produto interno.

Exemplo 2.1 Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$. Verifique se a aplicação $\langle x,y\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|$ define um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

Solução: O espaço das sequências de $\mathbb{R}^n$ é constituído por $x = (x_i) = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_i) = (y_1, ..., y_n)$, nesse sentido serão provadas as propriedades do produto interno.

1) Da aplicação dada tem-se que

$$\langle x,y\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| = |x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n|.$$

Como a multiplicação é comutativa, então,

$$\langle x,y\rangle = |y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n|.$$

Logo,

$$\langle x,y\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n} y_i x_i\right|.$$

Assim,

$$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle.$$

Mostrando a simetria.
2) Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y + z = (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n)$, tem-se que

$$\langle x, y+z\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i + z_i)\right| = |x_1(y_1+z_1) + x_2(y_2+z_2) + \ldots + x_n(y_n+z_n)|,$$

ou ainda,

$$\langle x, y+z\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i + x_iz_i)\right| = |x_1y_1 + x_1z_1 + x_2y_2 + x_2z_2 + \ldots + x_ny_n + x_nz_n|.$$

Assim,

$$\langle x, y+z\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} x_iz_i\right| = |(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n) + (x_1z_1 + x_2z_2 + \ldots + x_nz_n)|.$$

Da desigualdade triangular,

$$\langle x, y+z\rangle \leq |x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n| + |x_1z_1 + x_2z_2 + \ldots + x_nz_n|.$$

Logo,

$$\langle x, y+z\rangle \leq \left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} x_iz_i\right|.$$

Portanto,

$$\langle x, y+z\rangle \leq \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle.$$

Não satisfazendo a propriedade de bilinearidade.
Consequentemente, a aplicação $\langle x, y\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right|$ não define um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.3 Seja V um espaço vetorial. Uma forma bilinear é uma aplicação $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $(u, v) \to a(u, v)$, tal que
i) Para todo v fixado, $a(u, v)$ é uma forma linear em u, isto é,

$$a(u_1 + u_2, v) = a(u_1, v) + a(u_2, v) \; e$$

$$a(\alpha u, v) = \alpha a(u, v).$$

ii) Para todo u fixado, $a(u, v)$ é uma forma linear em v, isto é,

$$a(u, v_1 + v_2) = a(u, v_1) + a(u, v_2) \; e$$

$$a(u, \alpha v) = \alpha a(u, v).$$

Exemplo 2.2 O produto usual de números reais define uma forma bilinear da seguinte forma,

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to p(x, y) = xy \end{aligned}$$

Solução: Serão verificadas se i) e ii) são safisfeitas com a forma bilinear assim definida.
Sejam, $x, y, z \in \mathbb{R}$, com y fixado, tem-se que

$$p(x + z, y) = (x + z)y.$$

Fazendo a distributividade, obtem-se,

$$p(x+z,y) = xy + zy.$$

Assim,

$$p(x+z,y) = p(x,y) + p(z,y).$$

Seja,

$$p(\alpha x,y) = \alpha x \cdot y.$$

Logo,

$$p(\alpha x,y) = \alpha(xy).$$

Portanto,

$$p(\alpha x,y) = \alpha p(x,y).$$

Isso mostra a forma linear em x para todo y fixado.

Da propriedade ii), fixando-se x,

$$p(x,y+z) = x(y+z).$$

Fazendo a distributividade, temos

$$p(x,y+z) = xy + xz.$$

Assim,

$$p(x,y+z) = p(x,y) + p(x,z).$$

Seja,

$$p(x,\alpha y) = x \cdot \alpha y.$$

Logo,

$$p(x,\alpha y) = \alpha(xy).$$

Portanto,

$$p(x,\alpha y) = \alpha p(x,y).$$

Isso mostra a forma linear em y para todo x fixado.
Assim, as duas propriedades da forma bilinear são satisfeitas, consequentemente a aplicação é uma forma bilinear.

Agora será verificado, se a forma bilinear assim definida também satisfaz as propriedades simétrica e positiva do produto interno. Tem-se que,

$$p(x,y) = xy.$$

Como a multiplicação é comutativa, assim,

$$p(x, y) = yx.$$

Portanto,

$$p(x, y) = p(y, x).$$

Isso mostra a simetria.

Seja $p(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tem-se que

$$p(x, x) = xx.$$

Logo,

$$p(x, x) = x^2.$$

Assim, $p(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Seja agora, $p(x, x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, obtem-se

$$p(x, x) = xx.$$

Logo,

$$p(x, x) = x^2.$$

Portanto, $p(x, x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
Isso mostra a positividade.
Consequentemente a forma bilinear dada, também define um produto interno.

Teorema 2.1 Uma forma bilinear $B : V \times V \to \mathbb{R}$ é simétrica se, e somente se, $[B]$ é uma matriz simétrica.

Portanto, uma forma bilinear que não é simétrica, não define um produto interno. Consequentemente, dos exemplos dados obtemos que, todo produto interno é uma forma bilinear, mas nem toda forma bilinear é um produto interno.

2.2 Espaço Métrico

Definição 2.4 Seja V um espaço vetorial. Uma norma em V é uma aplicação

$$\begin{aligned} \|.\| : V &\to \mathbb{R} \\ u &\to \|u\|, \end{aligned}$$

Onde $\|u\|$ é chamada a norma de u e satisfaz as seguintes propriedades:

a) $\|u\| \geq 0$, para $\|u\| > 0$ se $u \neq 0$ e para $\|u\| = 0$ se $u = 0$.

b) $\|\lambda.u\| = |\lambda|.\|u\|$; $\forall\, u \in$ V e $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$; $\forall\, u, v \in$ V. (desigualdade triangular).

A partir do produto interno defini-se a norma de um vetor, por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}, \ \ \forall\, u \in \mathrm{V}. \tag{1}$$

Agora serão verificadas se as propriedades da norma são satisfeitas:
Propriedade(a)
$\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$, e
$\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} > 0 \Rightarrow \langle u, u\rangle > 0 \Leftrightarrow u \neq 0.$

Propriedade(b) Para cada $u \in \mathrm{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se que
$\|\alpha u\| = \langle \alpha u, \alpha u\rangle^{\frac{1}{2}} = (\alpha\alpha)^{\frac{1}{2}}\langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\sqrt{\langle u, u\rangle} = |\alpha|\|u\|.$

Propriedade(c) Decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz, definida da seguinte forma,

$$|\langle u, v\rangle| \ \ \leq \ \ \|u\|\|v\|. \tag{2}$$

Observa-se que a partir da definição (1), obtem-se

$$\|u + v\|^2 \ \ = \ \ \langle u + v, u + v\rangle. \tag{3}$$

Daí, pela propriedade de bilinearidade 2) em ii) do produto interno, tem-se que

$$\langle u + v, u + v\rangle \ \ = \ \ \langle u, u + v\rangle + \langle v, u + v\rangle,$$

logo,

$$\langle u + v, u + v\rangle \ \ = \ \ \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle.$$

Como o produto interno é simétrico, então, de (3),

$$\|u + v\|^2 = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle.$$

Daí, escreve-se,

$$\|u + v\|^2 = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \leq \langle u, u\rangle + 2|\langle u, v\rangle| + \langle v, v\rangle,$$

logo,

$$\|u + v\|^2 \leq \langle u, u\rangle + 2|\langle u, v\rangle| + \langle v, v\rangle.$$

Usando a equação (2) e a definição de norma, tem-se

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2,$$

ou ainda,

$$\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Daí,

$$\|u + v\| \leq \sqrt{(\|u\| + \|v\|)^2}.$$

Portanto,

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Provando assim, a desigualdade triangular. Portanto, a equação (1) define uma norma.

2.2.1 Alguns tipos de norma

- A norma do infinito
  $\|v\|_\infty = \max\limits_{i \in 1=n} |v_i|$ ou $\|v\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |v_i|$
- A norma absoluta
  $\|v\|_1 = \sum |v_i|$
- A norma ℓ^p
  $\|v\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} {v_i}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p \leq \infty$
- A norma euclidiana
  $\|v\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} {v_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$

Observa-se que a norma euclidiana é um caso particular da norma ℓ^p em que $(p = 2)$. Vale ressaltar que existem outros tipos de normas as quais dependem do Espaço que se pretende estudar.

Proposição 2.1 Seja X um espaço vetorial em que a norma é um caso particular do produto interno. Vale a lei do paralelogramo,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2), \ \ \forall \, u, v \in \mathrm{V}.$$

Demonstração:
Tem-se que,

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \text{ e},$$

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle.$$

Somando termo a termo as equações,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\langle u, u \rangle + 2\langle v, v \rangle.$$

Colocando em evidência e aplicando a definição de norma, então,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Definição 2.5 Um espaço vetorial normado é um par $(E, \|.\|)$, onde E é um espaço vetorial, e $\|.\|$ é uma norma em E.

Proposição 2.2 Todo espaço normado é espaço métrico.

3 Resultados e Discussão

3.1 Espaços de Hilbert

A partir dos conceitos visto na seção anterior, ainda será discutido sobre Sequência de Cauchy, Espaço Métrico Completo e Espaços de Banach os quais serão fundamentais para a definição dos Espaços de Hilbert.

Definição 3.1 Uma seqüência (x_n) num espaço normado M é de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |x_m - x_n| < \epsilon.$$

Proposição 3.1 Toda sequência convergente é de Cauchy.

Definição 3.2 Um espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente em M.

Definição 3.3 Seja M um espaço normado. Diz-se que M é um Espaço de Banach quando toda sequência de Cauchy em M é convergente em M.

Nota 3.1 Essas definições são cruciais quando fala-se em Espaços de Hilbert, pois todo Espaço de Hilbert é um espaço de Banach e todo Espaço de Banach é um espaço métrico/normado completo. Sendo que a recíproca não é verdadeira.

Definição 3.4 Espaço de Hilbert é qualquer espaço vetorial que possua uma operação denominada produto interno e cuja métrica gerada por esse produto interno o torne um espaço completo em relação a norma,

$$\|.\| = \langle ., . \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

O espaço ℓ^2 definido como o espaço das sequências de quadrados somáveis é um importante exemplo de Espaço de Hilbert. A seguir serão dados exemplos de sequências que pertencem ao espaço ℓ^2. Considere $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots\right), y = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right)$ e $z = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4}}, ...\right)$. Note que, $x, y \in \ell^2$, pois $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergem, já que trata-se respectivamente de uma série geométrica[1] e uma série harmônica[2] do tipo $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, com $p > 1$. Observe ainda que $z \notin \ell^2$, pois $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que diverge, por se tratar da série harmônica, com $p \leq 1$.

Exemplo 3.1 O espaço ℓ^2 ou espaço das sequências de quadrados somáveis é um Espaço de Hilbert.

[1] *Ver Corrêa [3] pag. 70*
[2] *Ver Corrêa [3] pag. 72 e 83*

Solução: O conjunto ℓ^2 é constituído por todas as sequências $x = (x_1, \cdots, x_i, \cdots)$ de números reais, tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} {x_i}^2 < +\infty, \quad \text{com} \;\; i = 1, \cdots, \infty.$$

Como $x \in \ell^2$, da norma euclidiana, tem-se que

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} {x_i}^2}. \tag{4}$$

Para mostrar que ℓ^2 é um Espaço Vetorial relativamente às operações $x + y = (x_i + y_i)$ e $\lambda x = (\lambda x_i)$, observa-se primeiro que caso $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$ pertencem a ℓ^2 então a série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ é convergente. Nota-se que a convergência de uma série é simplesmente a convergência de uma sequência de somas parciais.
A Desigualdade de Cauchy-Schwarz para séries é dada por

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right),$$

fazendo $n \to \infty$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}\right),$$

Da definição dada por (4), tem-se que

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} {x_i}^2} \;\; \text{e} \;\; \|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} {y_i}^2} \tag{5}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \leq \|x\|\|y\|. \tag{6}$$

Portanto, a série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ é convergente.

Agora, considerando $x, y \in \ell^2$, então para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} ({x_i}^2 + 2x_i y_i + {y_i}^2) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Fazendo $n \to \infty$ e usando a equação (5), tem-se que,

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Usando a equação (6), tem-se

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i)^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|.$$

Como $\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|x||y|$ é um número real. Logo,

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i)^2 < +\infty.$$

Portanto, $x + y \in \ell^2$.
Agora, $x \in \ell^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$daí,

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2.$$

Fazendo $n \to \infty$ e usando a equação (4), tem-se

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda x_i)^2 = \lambda^2 \|x\|.$$

Usando o argumento anterior,

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda x_i)^2 < +\infty.$$

Assim, $\lambda x \in \ell^2$. Consequentemente, ℓ^2 é um Espaço Vetorial.

Será definido agora, o produto interno da seguinte forma, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$, cuja norma subjacente é,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} {x_i}^2}.$$

Para mostrar que ℓ^2 é um espaço de Hilbert resta mostrar que ℓ^2 é um espaço métrico completo, isto é, que toda sequência de Cauchy em ℓ^2 é convergente em ℓ^2.
Tem-se que a métrica usual é dada por $d(x, y) = \|x - y\|$, logo pela definição da norma euclidiana,

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}.$$

Seja então (x_n) uma sequência de Cauchy em ℓ^2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e fixando qualquer $i \in \mathbb{N}$, tem-se por definição que

$$|x_{mi} - x_{ni}| = \sqrt{(x_{mi} - x_{ni})^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_{mi} - x_{ni})^2} = \|x_m - x_n\|.$$

Logo,

$$|x_{mi} - x_{ni}| \leq \|x_m - x_n\|.$$

Assim, $(x_{ni})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de (x_n) e portanto, $(x_{ni})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Daí, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe um número real $a_i = \lim_{n \to \infty} x_{ni}$, onde $a = (a_1, a_2, ...a_i, ...)$.
Ainda, por definição de sequência de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m - x_n\| < \epsilon, \ \forall\, m, n > n_0$. Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $m, n > n_0$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{k} (x_{mi} - x_{ni})^2 < \epsilon^2$$

Fazendo k e n fixos e tomando $m \to \infty$, da última desigualdade, obtem-se

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i - x_{ni})^2 < \epsilon^2, \ \ \forall\, n > n_0.$$

Fazendo $k \to \infty$, tem-se que

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - x_{ni})^2 < \epsilon^2, \ \ \forall\, n > n_0.$$

Como ℓ^2 é um Espaço Vetorial, pode-se escrever $a = a - x_n + x_n$, logo $a \in \ell^2$.

Note que $\forall\, n > n_0$, $(a - x_n)$ é dada uma sequência de quadrados somáveis, isto é, $a - x_n \in \ell^2$. Daí, da última desigualdade escreve-se que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - x_{ni})^2} \leq \sqrt{\epsilon^2}, \quad \forall\, n > n_0,$$

ou ainda, $|a - x_n| = |x_n - a| < \epsilon, \ \ \forall\, n > n_0$, ou seja, $a = \lim x_n$ em ℓ^2.
Assim, toda sequência de Cauchy em ℓ^2 é convergente e portanto ℓ^2 é um espaço de Hilbert.

Exemplo 3.2 O espaço ℓ^p, para $p \neq 2$ não é um espaço de Hilbert.

Nota 3.2 Neste exemplo, defini-se a norma $\|x\|_p$ por $\|x\|$.

Solução: Este fato será mostrado, através de um contra-exemplo. Seja $x = (1, 1, 0, 0, 0, ...)$ e $y = (1, -1, 0, 0, 0, ...) \in \ell^p$, da norma ℓ^p tem-se que,

$$\|x\| = (1^p + 1^p + 0^p + 0^p + 0^p + \dots)^{\frac{1}{p}} = (1 + 1)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

Considerando por um momento p par, assim

$$\|y\| = (1^p + (-1)^p + 0^p + 0^p + 0^p + \ldots)^{\frac{1}{p}} = (1+1)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}. \tag{8}$$

E ainda,

$$x + y = (2, 0, 0, 0, \ldots) \;\; \text{e} \;\; x - y = (0, 2, 0, 0, \ldots).$$

Logo,

$$\|x + y\| = (2^p)^{\frac{1}{p}} = 2 \;\; \text{e} \;\; \|x - y\| = (2^p)^{\frac{1}{p}} = 2.$$

Assim,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \;\; = \;\; 4 + 4 = 8 \tag{9}$$

Recordando que, a igualdade do paralelogramo é dada por,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \;\; = \;\; 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{10}$$

Comparando a equação (9) com a equação (10), tem-se

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \;\; = \;\; 8. \tag{11}$$

Substituindo a equação (7) e (8) na equação (11), obtem-se

$$2\left[(2^{\frac{1}{p}})^2 + (2^{\frac{1}{p}})^2\right] \;\; = \;\; 8.$$

Assim,

$$2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} \;\; = \;\; 4,$$

ou ainda,

$$2^{\frac{2}{p}}(1 + 1) \;\; = \;\; 4,$$

ou seja,

$$2^{\frac{2}{p}} \;\; = \;\; 2.$$

Logo o único valor que p pode assumir para que a lei do paralelogramo se verifique é o valor 2. Assim, para valores de $p \neq 2$ a lei do paralelogramo não se verifica, portanto o espaço ℓ^p não é um espaço com produto interno.
Consequentemente, ℓ^p não é um espaço de Hilbert.

4 Considerações Finais

Foi realizado neste trabalho, uma introdução ao estudo dos Espaços de Hilbert usando os conceitos de Norma e Produto Interno entre outros. Durante o desenvolvimento do mesmo, procurou-se fazer as demonstrações de forma simples e clara, através da utilização de exemplos de fácil compreensão, sempre recaindo nas propriedades e definições do curso de Análise Real.

Referências

[1] ANTONOW, Liliane Martinez. **Análise Funcional: um texto para iniciação científica**. 2011 Disponível em: $< http : //base.repositorio.unesp.br >$. 21 Maio, 2014.

[2] BIEZUNER, Rodney Josué. **Nota de Aula: Análise Funcional**. 2009. Disponível em: $< http : //www.mat.ufmg.br >$. Acesso em: 16 Abril. 2014.

[3] BOLDRINI, José Luiz. et. al. **Álgebra Linear**. 3 ed. São Paulo: Editora HARBRA Ltda, 1980.

[4] CORREA, Francisco Júlio S. A.. **Introdução a Análise Real** . UFPA ?

[5] **Espaços de Banach que Admitem uma Norma Uniformemente Convexa Equivalente** . Disponível em: $< http : //www.pg.im.ufrj.br >$. Acesso em: 15 Maio. 2014.

[6] **Espaços vetoriais, transformações lineares, determinantes. Funcionais lineares. Dualidade. Bidual**. Disponível em: $< http : //books.google.com.br >$. Acesso em: 21 Maio. 2014.

[7] HOFFMAM, Kenneth.; KUNZE, Ray. **Linear Álgebra**. Trad. Adalberto P. Bergamasco. São Paulo: Editora Polígino, 1970.

[8] KREYSZIG, Erwin. **Introductory Funcional Analysis with Applications**. New York: John Wiley e Sons, 1978.

[9] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA,2005.

[10] NOWOSAD, Pedro. **Introdução a Análise Funcional**. Pocos de Caldas: 1967.

[11] **Parte 1, Espacos de Banach**. 2009. Disponível em: $< http : //www.ime.usp.br >$. Acesso em: 20 Maio. 2014.

[12] **Produto interno e Geometria**. 2009. Disponível em: $< http : //www.mat.ufmg.br >$. Acesso em: 23 Maio. 2014.